

Spieltheoretische  
Kantenfärbungsprobleme auf Wäldern  
und verwandte Strukturen

Diplomarbeit  
von  
Stephan Dominique Andres

angefertigt im Mathematischen Institut  
der Universität zu Köln  
unter Anleitung von  
Herrn Professor Dr. Ulrich Faigle

Köln, im Sommersemester 2003



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Gerichtete und ungerichtete Graphen</b>	<b>1</b>
1.1 Grundlegende Definitionen . . . . .	1
1.2 Der Knotengrad . . . . .	2
1.3 Wälder und Bäume . . . . .	3
<b>2 Graphenfärbungsprobleme</b>	<b>5</b>
2.1 Knotenfärbungen . . . . .	5
2.2 Kantenfärbungen . . . . .	7
2.3 Der dynamische Aspekt . . . . .	8
2.4 Ein gerichtetes Knotenfärbungsproblem . . . . .	9
2.5 Ein gerichtetes Kantenfärbungsproblem . . . . .	10
<b>3 Graphenfärbungsspiele</b>	<b>12</b>
3.1 Allgemeine Graphenfärbungsspiele . . . . .	12
3.2 Gewinnstrategien . . . . .	13
3.3 Die Spielchromatische Zahl $Z_S(G)$ . . . . .	14
3.4 Acht verschiedene Spielarten . . . . .	15
3.4.1 Das ungerichtete Knotenfärbungsspiel (UKnot) . . . . .	15
3.4.2 Das ungerichtete Kantenfärbungsspiel (UKant) . . . . .	15
3.4.3 Das gerichtete Knotenfärbungsspiel (GKnot) . . . . .	16
3.4.4 Das gerichtete Kantenfärbungsspiel (GKant) . . . . .	16
3.4.5 Bemerkungen . . . . .	16
3.4.6 Das ungerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel (NeuUKnot) . . . . .	17
3.4.7 Das ungerichtete „neue“ Kantenfärbungsspiel (NeuUKant) . . . . .	17
3.4.8 Das gerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel (NeuGKnot) . . . . .	17
3.4.9 Das gerichtete „neue“ Kantenfärbungsspiel (NeuGKant) . . . . .	17
3.5 Verwandtschaften durch Liniengraph . . . . .	17
3.6 Explizite Spiele . . . . .	17
3.7 Spielchromatische Zahlen und Indizes . . . . .	18

3.8	Spielchromatische Zahlen von Graphenklassen . . . . .	19
3.9	Normale Spielarten . . . . .	20
3.10	Schöne Spiele . . . . .	21
3.11	Unterschied von $\chi(G)$ und $Z_S(G)$ . . . . .	22
3.12	Bisherige Ergebnisse . . . . .	23
<b>I</b>	<b>Knotenfärbungsspiele</b>	<b>27</b>
<b>4</b>	<b>Knotenfärbungsspiele auf Wäldern</b>	<b>27</b>
4.1	Das ungerichtete Knotenfärbungsspiel . . . . .	27
4.2	Das gerichtete Knotenfärbungsspiel . . . . .	30
4.3	Das ungerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel . . . . .	33
4.4	Das gerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel . . . . .	36
4.5	Andere Knotenfärbungsspiele . . . . .	39
4.5.1	Das relaxierte Spiel . . . . .	39
4.5.2	Andere relaxierte Spiele . . . . .	39
<b>5</b>	<b>Knotenfärbungsspiele auf Torusgittergraphen</b>	<b>40</b>
5.1	Torusgittergraphen . . . . .	40
5.2	Die spielchromatische Zahl von bestimmten $TG_{m,n}$ . . . . .	41
5.3	Das Gegenbeispiel von Andres . . . . .	47
<b>II</b>	<b>Kantenfärbungsspiele auf Wäldern</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Allgemeine Vorgehensweise</b>	<b>49</b>
6.1	Zerlegung in unabhängige Teilbäume . . . . .	49
6.1.1	... bei der Spielart (UKant) . . . . .	49
6.1.2	... bei der Spielart (GKant) . . . . .	50
6.2	Klassen trivialer Wälder . . . . .	51
6.3	Abschätzung der spielchromatischen Indizes . . . . .	53
6.4	Verschärfung von Satz 24 . . . . .	55
6.5	*-Zerlegbarkeit . . . . .	56

6.6	Einige Bemerkungen zum gerichteten Spiel . . . . .	57
6.7	Weitere Definitionen . . . . .	58
6.7.1	Partielle Färbungen . . . . .	58
6.7.2	Tragende Pfade und $v_0$ -Äste . . . . .	58
6.7.3	Sterne und Sternschnuppen . . . . .	59
6.7.4	Regularität . . . . .	59
6.7.5	Stark unpassende Kanten . . . . .	59
6.8	Erklärung der Zeichnungen . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit <math>\Delta \geq 6</math></b>	<b>62</b>
7.1	Verschärfung von Satz 24 . . . . .	62
7.2	Die erlaubten Typen . . . . .	62
7.3	Zerlegung der erlaubten Typen . . . . .	63
<b>8</b>	<b>Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit <math>\Delta = 5</math></b>	<b>66</b>
8.1	Verschärfung von Satz 24 . . . . .	66
8.2	Die erlaubten Typen . . . . .	67
8.2.1	Was sollte verboten sein? . . . . .	67
8.2.2	Die Typen $S_n$ . . . . .	68
8.2.3	Die anderen erlaubten Typen . . . . .	69
8.3	Zerlegung der erlaubten Typen . . . . .	70
8.4	Zerlegung der zusätzlichen erlaubten Typen . . . . .	79
<b>9</b>	<b>Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit <math>\Delta = 3</math></b>	<b>83</b>
9.1	Verschärfung von Satz 24 . . . . .	84
9.2	Spezielle verbotene Typen . . . . .	86
9.3	Die erlaubten Typen . . . . .	87
9.3.1	Typen von beschränkter Größe . . . . .	87
9.3.2	Andere Typen mit 0, 1, 2 oder 3 gefärbten Kanten . . . . .	89
9.3.3	Andere Typen mit 4 gefärbten Kanten . . . . .	90
9.3.4	Andere Typen mit 5 oder 7 gefärbten Kanten . . . . .	92
9.4	Zusätzliche erlaubte Typen . . . . .	95
9.5	Zerlegung der erlaubten Typen . . . . .	97
9.6	Zerlegung der zusätzlichen erlaubten Typen . . . . .	123

<b>10 Schwierigkeiten beim Fall <math>\Delta = 4</math></b>	<b>127</b>
<b>III Ausblicke</b>	<b>131</b>
<b>11 Spiele auf unendlichen Graphen</b>	<b>131</b>
11.1 Unendliche Graphen . . . . .	131
11.2 Ein verallgemeinerter Spielbegriff . . . . .	132
11.3 Unendliche Spielbäume und Gewinnstrategien . . . . .	134
11.4 Spielchromatische Zahlen . . . . .	135
11.5 Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit . . . . .	137
<b>12 Offene Fragen</b>	<b>141</b>
12.1 Spiele auf Wäldern . . . . .	141
12.2 Spiele auf komplizierteren Graphen . . . . .	142
12.3 Grundsätzliche Fragestellungen . . . . .	143
<b>Literatur</b>	<b>145</b>
<b>Index</b>	<b>147</b>

# Abbildungsverzeichnis

1	Die Sternpunktmenge . . . . .	4
2	Der Baum $B_0$ . . . . .	29
3	Ein $v_0$ -Ast von $B_0$ . . . . .	30
4	Der gerichtete Baum $B_1$ . . . . .	32
5	Der gerichtete Wald $W_2$ . . . . .	37
6	Spielstand nach dem zweiten Zug von Alice . . . . .	43
7	Dreiertaschen und Rettungsmöglichkeiten . . . . .	44
8	Der gerichtete Torusgittergraph $T_0$ . . . . .	47
9	Der Graph $G_5$ . . . . .	53
10	Unabhängige Teilbäume . . . . .	60
11	Spezielle verbotene Typen . . . . .	67
12	Die erlaubten Typen (außer $S_n$ ). . . . .	69
13	Die zusätzlichen erlaubten Typen . . . . .	70
14	Struktur von Typ $U$ . . . . .	74
15	Struktur von Typ $Z$ . . . . .	76
16	Struktur von Typ $W$ . . . . .	76
17	Struktur von Typ $Y$ . . . . .	77
18	Struktur von Typ $A$ . . . . .	78
19	Struktur von Typ $B$ . . . . .	78
20	Struktur von Typ $C$ . . . . .	79
21	Struktur von Typ $V'_1$ . . . . .	80
22	Struktur von Typ $Y'$ . . . . .	81
23	Struktur von Typ $A'$ und $B'$ . . . . .	82
24	Struktur von Typ $C'$ und $C''$ . . . . .	82
25	Die erlaubten Untertypen von Typ $T$ . . . . .	94
26	Struktur von Typ $B$ . . . . .	97
27	Situation im Fall 1.A . . . . .	102
28	Struktur von Typ $D$ . . . . .	109
29	Struktur von Typ $M$ . . . . .	111
30	Struktur von Typ $N$ . . . . .	112

31	Struktur von Typ $P$ . . . . .	112
32	Struktur von Typ $V_\nu$ . . . . .	114
33	Struktur von Typ $Y_\nu$ . . . . .	115
34	Struktur von Typ $O_{\mu\nu}$ . . . . .	118
35	Struktur von Typ $W_\gamma$ . . . . .	119
36	Struktur von Typ $E$ . . . . .	120
37	Struktur von Typ $W$ . . . . .	120
38	Struktur von Typ $R$ . . . . .	122
39	Struktur von Typ $T^g$ . . . . .	123
40	Struktur von Typ $W^g$ . . . . .	125
41	Problematische Konfigurationen . . . . .	128



## Vorwort und Dank

Graphenfärbungsspiele, wie sie in dieser Arbeit betrachtet werden, tauchen in der mathematischen Literatur erst seit 1991 auf. Es handelt sich also um eine sehr junge Forschungsdisziplin, in der noch viele interessante Fragestellungen auf eine Lösung harren. Einige Ergebnisse sollen hier präsentiert werden, wobei der Schwerpunkt der Arbeit auf Spielen mit Wäldern liegen wird.

Diese Spiele bestehen darin, dass zwei Spieler abwechselnd ungefärbte Knoten (oder Kanten, je nach Spielvariante) eines gegebenen gerichteten Graphen mit einer zulässigen Farbe färben, bis kein Zug mehr möglich ist. Der Begriff der Zulässigkeit wird dabei von Spiel zu Spiel verschieden und von zentraler Bedeutung sein. In dieser Arbeit tauchen die Spiele immer in der sogenannten *maker-breaker*-Variante auf, in der der eine Spieler gewinnt, falls alle Knoten (oder Kanten) am Ende des Spiels gefärbt sind, und ansonsten der andere.

Spielt man solch ein Spiel auf Wäldern, so liegt die wesentliche Vereinfachung der Betrachtungsweise auf dem Begriff sogenannter *unabhängiger Teilbäume*. Wir benutzen diesen Begriff sowohl für Knoten- als auch für Kantenfärbungsspiele, im Unterschied zur englischsprachigen Literatur, in der bei Knotenfärbungsspielen der Begriff *trunk* und bei Kantenfärbungsspielen der Begriff *independent subtree* geläufig ist.

Die Arbeit ist in vier Teile unterteilt: eine Einführung, einen **Teil I** über Knotenfärbungsspiele, den **Teil II** über Kantenfärbungsspiele auf Wäldern, auf dem der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt, und einen **Teil III**, in dem die wesentlichen Resultate der Arbeit in einer letzten Verallgemeinerung dargestellt sowie einige offene Fragen aufgelistet werden.

An dieser Stelle möchte ich Prof. Dr. Ulrich Faigle dafür danken, dass er mich auf diese interessanten Probleme aufmerksam gemacht hat. Ferner möchte ich ihm danken für die Unterstützung, die er mir während der Entstehungsphase dieser Arbeit zukommen ließ. Er ermutigte mich insbesondere, einige meiner Ergebnisse auf einem internationalen Workshop vorzustellen.

Danken möchte ich aber auch meiner Mutter und meinem Bruder, die mich durch ihr Verständnis und ihre Geduld unterstützten.

Köln, den 7. August 2003

Stephan Dominique Andres



## Zu dieser Arbeit

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit einem jüngeren Zweig der Färbungstheorie von Graphen, bei dem das Färben im Rahmen von nichtkooperativen Zwei-Personen-Nullsummen-Spielen erfolgt. Zentrales Thema sind Kantenfärbungsspiele auf Wäldern und damit verwandte Strukturen.

Die ersten drei Abschnitte der Arbeit dienen zur Einführung der benötigten Begriffe sowie zur Erörterung des geschichtlichen Hintergrundes. Abschnitt 1 stellt die Sprechweisen aus der Graphentheorie sicher. In Abschnitt 2 werden vier verschiedene Graphenfärbungsprobleme vorgestellt. Hier wird ebenfalls der Zusammenhang zwischen Knoten- und Kantenfärbungsproblemen mittels der Konstruktion des Liniengraphen (oder des gerichteten Liniengraphen) aufgezeigt. Zwei der betrachteten Probleme sind klassische Probleme der Graphentheorie, die schon seit über hundert Jahren untersucht werden. Die beiden anderen, die sogenannten „gerichteten“ Probleme, wurden im Rahmen dieser Arbeit definiert.

Nun kann man jedes dieser Probleme in spieltheoretischen Varianten betrachten. Abschnitt 3 erklärt neben einem allgemeinen Konzept von Graphenfärbungsspielen zu jedem Graphenfärbungsproblem 12 spieltheoretische Varianten. Solch ein Spiel besteht z.B. darin, dass zwei Spieler abwechselnd jeweils eine Kante eines vorgegebenen, zu Anfang ungefärbten Graphen mit einer Farbe aus einer vorgegebenen Farbmenge färben, so dass „aneinanderstoßende“ Kanten mit verschiedenen Farben gefärbt sind. Das Spiel endet, wenn kein Zug mehr möglich ist. Was das Spiel dann interessant macht, ist die folgende Unsymmetrie: Der erste Spieler gewinnt, wenn alle Kanten am Ende des Spiels gefärbt sind, sonst gewinnt der andere. Wer gewinnt, hängt natürlich in erster Linie von der Anzahl der vorgegebenen Farben und dem vorgegebenen Graphen ab. Deshalb wird in 3.3 und 3.7 für jeden Graphen und jedes Spiel eine Kenngröße eingeführt, nämlich die minimale Anzahl von Farben, für die der erste Spieler eine Gewinnstrategie für das Spiel auf dem Graphen besitzt. Diese Größe, je nach Spiel als spielchromatische Zahl oder spielchromatischer Index bezeichnet, wird in der vorliegenden Arbeit untersucht. Insbesondere interessiert man sich für scharfe obere Abschätzungen dieser Größe auf bestimmten Graphenklassen. Um bei der Vielzahl der möglichen Spiele nicht die Übersicht zu verlieren, werden in 3.7 und 3.9 Beziehungen zwischen den einzelnen spielchromatischen Zahlen und Indizes gezeigt. Abschließend werden in 3.12 die bisherigen Erkenntnisse der Forschung im Bereich der Graphenfärbungsspiele kurz vorgestellt.

Der kurze **Teil I** der Arbeit bespricht die im Titel genannten „verwandten Strukturen“ zu den Kantenfärbungsspielen auf Wäldern. Dies sind zunächst einmal Knotenfärbungsspiele auf Wäldern, die wesentlich einfacher zu behandeln sind, als die entsprechenden Kantenfärbungsspiele, deshalb wurden sie

auch in Abschnitt 4 diesen vorangestellt. Der Grund für ihre Verwandtschaft liegt darin, dass für beide Arten von Spielen bei der Gewinnung von oberen Schranken für die spielchromatischen Zahlen bzw. Indizes das Konzept der unabhängigen Teilbäume grundlegend ist. Dies wird hier für das ungerichtete und das gerichtete Knotenfärbungsspiel erläutert. Der kleine Exkurs über Knotenfärbungsspiele auf Torusgittergraphen in Kapitel 5 soll illustrieren, dass selbst auf einfachen Graphen mit totalen Symmetrien die Bestimmung von spielchromatischen Zahlen einzelner Graphen nicht einfach ist, was die Betrachtung von Graphenklassen motiviert. In 5.3 wird ferner die Unabhängigkeit von gerichtetem und ungerichtetem Knotenfärbungsspiel demonstriert.

Der weitaus längste Teil der Arbeit befasst sich mit Kantenfärbungsspielen auf Wäldern. Eine Vermutung von He, Hou, Mi, Shao und Wang [12] besagt, dass beim ungerichteten Kantenfärbungsspiel auf einem Wald mit maximalem Knotengrad  $\Delta$  der erste Spieler immer eine Gewinnstrategie mit  $\Delta + 1$  Farben besitzt. Bekannt ist die Richtigkeit der Vermutung für  $\Delta \leq 2$  und  $\Delta \geq 6$ . Nun kann man diese Vermutung auf das gerichtete Kantenfärbungsspiel erweitern. Zentrales Resultat von **Teil II** ist der Beweis der Richtigkeit beider Vermutungen in allen Fällen  $\Delta \in \mathbb{N}_0 \setminus \{4\}$ . Abschnitt 6 stellt die grundsätzliche gemeinsame Idee aller Beweise dar, insbesondere das Konzept der unabhängigen Teilbäume, und behandelt die Trivialfälle  $\Delta \leq 2$  im Detail; in 7 werden der Fall  $\Delta \geq 6$ , in 8 der Fall  $\Delta = 5$  und in 9 der Fall  $\Delta = 3$  in allen Einzelheiten ausgeführt. In 10 wird dargelegt, warum es gut möglich sein könnte, dass die noch offenen Vermutungen im Fall  $\Delta = 4$  falsch sind.

**Teil III** stellt eine kurze Abschlussbetrachtung dar. Zunächst werden in 11 sämtliche Ergebnisse der Arbeit über Spiele auf Wäldern auf Klassen unendlicher Wälder verallgemeinert. Hierzu werden zunächst die benötigten Begriffe über unendliche Graphen, d.h. solche, in denen die Knotenmenge nicht endlich ist, eingeführt, danach folgt eine Auflistung der wesentlichen Resultate der Arbeit. Der allerletzte Abschnitt 12 lenkt die Aufmerksamkeit auf wichtige offene Fragen im Bereich des spieltheoretischen Graphenfärbens.

# Einführung

## 1 Gerichtete und ungerichtete Graphen

### 1.1 Grundlegende Definitionen

Ein *gerichteter Graph*  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine endliche Menge ist und  $E \subseteq \{(v, w) \in V \times V \mid v \neq w\}$  eine Menge von geordneten Paaren, deren Elemente aus  $V$  und verschieden sind, wobei zusätzlich gelten soll:

$$\forall v, w \in V : ((v, w) \in E \implies (w, v) \notin E)$$

Wir bezeichnen die Elemente von  $V$  als *Knoten* und die von  $E$  als *Kanten*. Wenn  $e = (v, w)$  eine Kante ist, so nennen wir  $v$  *Anfangsknoten (oder Anfangspunkt)* und  $w$  *Endknoten (oder Endpunkt)* von  $e$ ,  $v$  und  $w$  heißen *benachbart (oder adjazent oder Nachbarknoten)* und wir benutzen die Sprechweise  *$e$  hängt an  $v$*  bzw.  *$w$* , oder damit gleichwertig,  *$v$  bzw.  $w$  inzidiert mit  $e$* . Zwei Kanten heißen *adjazent*, wenn sie an dem gleichen Knoten hängen und verschieden sind. Seien  $e_1$  und  $e_2$  zwei adjazente Kanten, mit denen der Knoten  $v$  inzidiert.  $e_2$  heißt *in  $e_1$  eingehende Kante*, wenn  $v$  der Endknoten von  $e_2$  ist, andernfalls *aus  $e_1$  austretende Kante*.

Ein *ungerichteter Graph*  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine endliche Menge ist und  $E \subseteq \{M \in 2^V \mid \#M = 2\}$  eine Menge von Zweiermengen mit Elementen aus  $V$ . Wir bezeichnen auch hier die Elemente von  $V$  als *Knoten* und die Elemente von  $E$  als *Kanten*. Ist  $e = \{v, w\}$  eine Kante, so bezeichnen wir  $v$  und  $w$  als *Endknoten (oder Endpunkte)* von  $e$ .

Um die Terminologie zu vereinfachen, schreiben wir im Fall eines ungerichteten Graphen für eine Kante  $\{v, w\} \in E$  das Symbol  $(v, w)$  oder  $(w, v)$ . D.h. wir definieren in diesem Fall:

$$\forall v, w \in V : (v, w) := (w, v) := \{v, w\} \quad (1)$$

Auf diese Weise können wir die Begriffe *benachbart sein*, *hängen an*, *inzidieren mit* und *adjazent sein* analog zum gerichteten Fall einführen.

Als *Graphen* wollen wir sowohl einen ungerichteten als auch einen gerichteten Graphen verstehen. Man beachte, dass die so definierten Graphen weder Doppelkanten noch Schleifen besitzen, im gerichteten Fall gibt es nicht einmal gegensätzlich orientierte Doppelkanten.

Die Vorstellung, die man dem Begriff Graph zugrunde legen kann, besteht darin, die Knoten als Punkte (z.B. im  $\mathbb{R}^3$ ) anzusehen und die Kanten als Verbindungslinien zwischen gewissen Knoten. Im gerichteten Fall tragen

diese Verbindungslinien zusätzlich eine Orientierung, können also als Pfeile verstanden werden.

Mit (1) können wir auch weitere benötigte Begriffe zugleich für ungerichtete wie für gerichtete Graphen erklären.

Ist  $G = (V, E)$  ein Graph, so nennen wir einen Graphen  $G' = (V', E')$  einen *Teilgraphen* von  $G$ , wenn erstens  $V' \subseteq V$  und zweitens

$$E' \subseteq \{(v, w) \in E \mid v \in V' \wedge w \in V'\}$$

gilt. Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Wir bezeichnen eine endliche Folge von Knoten und Kanten

$$v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3 \dots e_n v_n$$

als *Pfad der Länge  $n$* , wenn alle  $v_i \in V$  für  $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , alle  $e_i \in E$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  und wenn gilt:  $e_i = (v_{i-1}, v_i)$  oder  $e_i = (v_i, v_{i-1})$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Dabei nennen wir  $v_0$  den *Anfangs-* und  $v_n$  den *Endpunkt* des Pfades und sprechen auch von einem *Pfad von  $v_0$  nach  $v_n$* . Die Menge  $\{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  heißt die *Knotenmenge des Pfades*. Die Kante  $e_n$  nennen wir *letzte Kante auf dem Pfad*. Der Pfad heißt *kreisfrei*, wenn alle  $v_i$  paarweise verschieden sind.

## 1.2 Der Knotengrad

Eine wichtige Größe bei unseren späteren Betrachtungen stellt der sogenannte Knotengrad dar. Dazu sei  $G = (V, E)$  ein (ungerichteter oder gerichteter) Graph. Wir definieren:

Der *Knotengrad*  $\delta_G(v)$  eines Knotens  $v \in V$  ist die Anzahl der an  $v$  hängenden Kanten, also

$$\delta_G(v) := \#\{u \in V \mid (u, v) \in E \vee (v, u) \in E\}.$$

Im Falle eines gerichteten Graphen können wir noch zwei weitere Knotengrade einführen, den *eingehenden Knotengrad*  $\delta_G^+(v)$  eines Knotens  $v \in V$ , sowie den *austretenden Knotengrad*  $\delta_G^-(v)$ , die wie folgt erklärt sind:

$$\delta_G^+(v) := \#\{u \in V \mid (u, v) \in E\}$$

$$\delta_G^-(v) := \#\{u \in V \mid (v, u) \in E\}$$

Für uns wichtig wird der *maximale Knotengrad*  $\Delta(G)$  eines Graphen sein. Dieser ist bei einem Graphen  $G$  mit nichtleerer Knotenmenge gegeben durch:

$$\Delta(G) := \max\{\delta_G(v) \mid v \in V\}$$

Analog haben wir im Falle eines gerichteten Graphen

$$\Delta^+(G) := \max\{\delta_G^+(v) \mid v \in V\}$$

$$\Delta^-(G) := \max\{\delta_G^-(v) \mid v \in V\}$$

Für den *leeren Graphen*  $K_0 = (\emptyset, \emptyset)$  setzen wir:

$$\Delta(K_0) := \Delta^+(K_0) := \Delta^-(K_0) := 0$$

### 1.3 Wälder und Bäume

Ein Graph  $G = (V, E)$  ist ein *Wald*, wenn zu je zwei Knoten  $v, w \in E$  höchstens ein kreisfreier Pfad von  $v$  nach  $w$  existiert. Einen Wald  $G = (V, E)$ , in dem sogar zu je zwei Knoten  $v, w \in E$  genau ein kreisfreier Pfad von  $v$  nach  $w$  existiert, nennen wir *Baum*. Offensichtlich besteht jeder Wald aus Bäumen, genau wie im richtigen Leben.

Aus der Definition ist unmittelbar klar, dass Teilgraphen von Wäldern wieder Wälder sind. Einen Teilgraphen eines Baumes nennen wir *Teilbaum*, wenn er selbst ein Baum ist.

Sei  $G = (V, E)$  ein Baum. Der *Pfad von einer Kante*  $e = (v, w)$  *zu einem Knoten*  $u$  ist ein Pfad kürzester Länge unter den beiden (eindeutig bestimmten) kreisfreien Pfaden von  $v$  nach  $u$  bzw. von  $w$  nach  $u$ . Dieser Pfad ist eindeutig bestimmt, was man leicht aus der Definition eines Baumes folgert. Seien nun  $e_1, e_2 \in E$ ,  $e_2 = (v, w)$ ,  $e_1 \neq e_2$ . Der *Pfad von der Kante*  $e_1$  *zur Kante*  $e_2$  ist ein kreisfreier Pfad kürzester Länge unter den beiden Pfaden von  $e_1$  nach  $v$  bzw. von  $e_1$  nach  $w$ . Auch dieser Pfad ist eindeutig bestimmt. Seien nun  $e_1, e_2, \dots, e_n \in E$  paarweise verschieden, wobei  $n \geq 2$ . Wenn  $K_{ij}$  für  $i \neq j$  die Knotenmenge des Pfades von  $e_i$  nach  $e_j$  bezeichnet, so ist

$$S = \bigcap_{j=1}^n \bigcap_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j \\ i \neq k}}^n K_{ij}$$

die *Sternpunktmenge bezüglich*  $e_1, e_2, \dots, e_n$ . Wegen  $n \geq 2$  wird nicht über die leere Menge geschnitten, also ist  $S$  wohldefiniert. Für  $n = 2$  ist die Sternpunktmenge leer. Ein Knoten  $v$  heißt *Sternpunkt von*  $e_1, e_2, \dots, e_n$ , wenn die Sternpunktmenge bezüglich  $e_1, e_2, \dots, e_n$  nur  $v$  als einziges Element enthält. Zu genau drei paarweise verschiedenen Kanten  $e_1, e_2$  und  $e_3$ , die nicht auf einem gemeinsamen kreisfreien Pfad liegen, gibt es immer einen Sternpunkt von  $e_1, e_2, e_3$ .

Wir sagen, dass ein Teilbaum eines Baumes an einem Knoten  $v$  *hängt*, wenn  $v$  mit genau einer Kante des Teilbaums inzidiert. Wenn der Teilbaum

nur eine Kante  $e$  enthält, ist dies äquivalent dazu, dass  $e$  an  $v$  hängt, im Sinne unserer alten Definition.

Eine Kante  $e = (v, w)$  in einem Wald  $G$  heißt *Blatt*, wenn  $\delta_G(v) = 1$  oder  $\delta_G(w) = 1$  gilt. Im Falle eines gerichteten Waldes bezeichnen wir  $e$  als *nach innen gerichtetes Blatt*, wenn  $\delta_G(v) = 1$ , und als *nach außen gerichtetes Blatt*, wenn  $\delta_G(w) = 1$ . Eine Kante in einem Wald, die kein Blatt ist, bezeichnen wir als *innere Kante*.

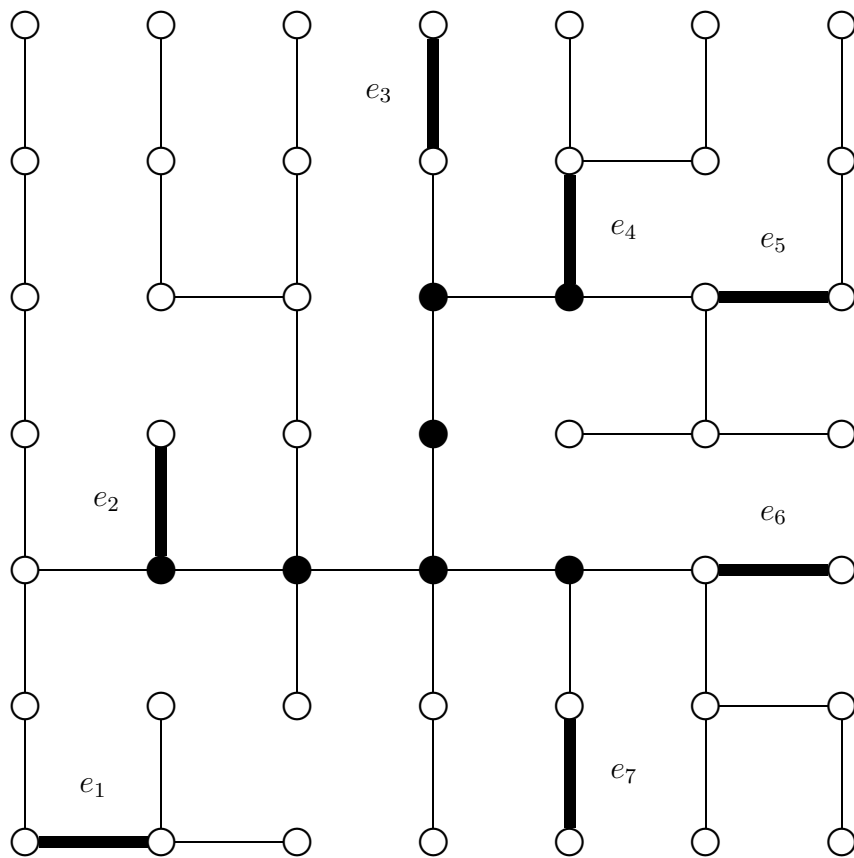


Abbildung 1: Beispiel für die Sternpunktmenge eines Baumes: Genau die schwarzen Knoten bilden die Sternpunktmenge bezüglich der dick gezeichneten Kanten  $e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6$  und  $e_7$ .



## 2 Graphenfärbungsprobleme

### 2.1 Knotenfärbungen

In der Graphentheorie tauchte schon sehr früh das Problem des Färbens eines Graphen auf. Eines der ältesten Probleme in diesem Zusammenhang ist das *Vier-Farben-Problem*, welches auch *Landkarten(färbungs)problem* genannt wird. Im Jahre 1852 stellte Francis Guthrie seinem jüngeren Bruder Frederick die Frage, ob zusammenhängende Länder auf der Sphäre immer mit höchstens vier Farben so gefärbt werden können, dass aneinander grenzende Länder (deren Grenze aus mehr als nur einem Punkt besteht) verschiedene Farben aufweisen (vgl. Einleitung in [18]). Da Frederick und viele andere Mathematiker zu jener Zeit die Frage nicht beantworten konnten, fand sie als Vier-Farben-Problem Eingang in die Mathematik und beeinflusste die Graphentheorie in mannigfacher Weise. Diese so harmlos aussehende Fragestellung erwies sich als äußerst hartnäckig; bis heute ist dem Autor dieser Arbeit kein Beweis bekannt, den ein Mensch ohne technische Hilfe nachvollziehen könnte. Im Sommer 1976 wurde die Frage von K.Appel, W.Haken und J.Koch nach dreieinhalbjähriger Arbeit mittels extrem aufwendiger Hilfe von Computern mit „ja“ beantwortet (vgl. [11]). Die Richtigkeit dieses Beweises hat der Autor allerdings nicht überprüft.<sup>1</sup>

Was hat das Vier-Farben-Problem nun mit Graphentheorie zu tun? Man stelle sich einen Knoten in die Mitte jedes Landes gemalt vor. Zwei Knoten werden durch eine Kante verbunden, wenn die entsprechenden Länder aneinander grenzen. Dabei entsteht ein sogenannter *planarer Graph*, d.h. ein Graph, der in der Ebene so gezeichnet werden kann, dass sich keine Kanten

---

<sup>1</sup>Lesenswert ist auch der Artikel von Swart [19], der eine Antwort auf einen Artikel von Tymoczko [20] darstellt und einige philosophische Fragen beleuchtet, die durch die Lösung eines hundert Jahre alten Problems mittels Computerhilfe aufgeworfen wurden. Tymoczko behauptet, dass der Vier-Farben-Satz im Gegensatz zu anderen mathematischen Sätzen eine a-posteriori-Wahrheit sei. Swart belegt aber, dass *alle* mathematischen Wahrheiten, auch solche, die mit Hilfe von Computern gewonnen wurden, als a-priori-Wahrheiten anzusehen sind. Dabei versteht er unter einer a-priori-Wahrheit eine Wahrheit mit universeller und notwendiger Gültigkeit, die im Prinzip ohne Rückgriff auf Sinneserfahrungen der physischen Welt bewiesen werden kann. Er weist darauf hin, dass probabilistische Methoden beim Beweis des Vier-Farben-Satzes nur zur Ideenfindung, nicht aber zum Beweisgang selbst gedient haben. Tymoczko bezweifelt die Nachprüfbarkeit der Beweise des Vier-Farben-Satzes. Dagegen sind gemäß Swart in ihnen zumindest zwei der drei Wesensmerkmale mathematischer Beweise enthalten: sie seien überzeugend und nachprüfbar, wenngleich nicht adäquat formalisiert. Mögliche Fehler in der Implementation von Algorithmen auf Computern seien nichts anderes als logische Fehler, die auch in Beweisen mit Stift und Papier enthalten sein können. Selbst wenn man den Vier-Farben-Satz als „Agnogramm“, also als eine Zwischenform von Vermutung und Satz verstünde, könnte er doch niemals eine a-posteriori-Wahrheit darstellen, die ja dadurch gekennzeichnet ist, dass sie *nur* mit Hilfe von Experimenten erfahren werden kann.

überkreuzen. In moderner Sprechweise lautet das Problem also: Kann ein planarer Graph derart mit vier Farben gefärbt werden, dass benachbarte Knoten niemals die gleiche Farbe besitzen?

Das Vier-Farben-Problem war aber nur der Stein des Anstoßes für viele weitere Untersuchungen. Nachdem man es in graphentheoretischer Sprache formuliert hatte, lag die Frage nahe, wie es mit Färbungsproblemen auf anderen Graphenklassen aussieht. Tatsächlich hat man für andere Graphenklassen, zum Beispiel für solche Graphen, die sich auf der Oberfläche eines Torus einbetten lassen, wesentlich früher gute Resultate erzielt<sup>2</sup> als für planare Graphen.

Wie sieht nun ein solch allgemeines Färbungsproblem formal aus? Sei dazu  $G = (V, E)$  zunächst ein ungerichteter Graph und  $F = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  eine endliche Menge, die sogenannte *Farbmenge*.

Unter einer *Knotenfärbung* zu  $G$  und  $F$  verstehen wir eine Funktion

$$f: V \longrightarrow F,$$

die die Eigenschaft hat, dass  $f(v) \neq f(w)$  für je zwei benachbarte Knoten  $v$  und  $w$  gilt.

Das (ungerichtete) Färbungsproblem besteht nun darin, zu entscheiden, ob zu gegebenen Graphen  $G$  und Farbmengen  $F$  eine Knotenfärbung existiert. Wenn zu  $G$  und  $F$  eine Knotenfärbung existiert, dann sicherlich auch zu  $G$  und  $F \cup \{a\}$  für ein  $a \notin F$ . Dies motiviert die folgende Definition:

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph. Die *chromatische Zahl*  $\chi(G)$  von  $G$  sei die kleinste ganze Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass zu  $G$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  eine Knotenfärbung existiert. Eine solche Zahl muss es geben, da man zu  $G$  und  $\{1, 2, \dots, \#V\}$  eine triviale Knotenfärbung hat, indem man jedem Knoten eine andere Farbe zuordnet.

Erinnern wir uns an den Begriff des Knotengrades. Dann notieren wir die folgende triviale Abschätzung:

$$0 \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1 \tag{2}$$

Diese gilt, da alle Nachbarn (höchstens  $\Delta(G)$  Stück) eines Knotens  $v \in V$  mit höchstens  $\Delta(G)$  Farben gefärbt sein können, somit bleibt noch eine Farbe, um  $v$  zu färben.

In diesem formalen Kontext lautet der Vier-Farben-Satz also

$$\chi(G) \leq 4 \quad \text{für planare Graphen } G.$$

Der Vier-Farben-Satz mag als Beispiel für die geschichtlichen Hintergründe der folgenden Theorien dienen. Etwa 200 andere, zumeist ungelöste Problemstellungen aus dem Bereich des Graphenfärbens werden in [13] dargestellt.

---

<sup>2</sup>teilweise schon gegen Ende des 19. Jahrhunderts, vgl. [18]

## 2.2 Kantenfärbungen

Ein anderes Problem, das sich aber als Spezialfall des Knotenfärbungsproblems herausstellen wird, ist das Kantenfärbungsproblem. Hierbei müssen statt der Knoten die Kanten zulässig gefärbt werden. Wieder sei  $G = (V, E)$  ein (ungerichteter) Graph und  $F = \{1, 2, \dots, n\}$  eine endliche Menge.

Eine *Kantenfärbung* zu  $G$  und  $F$  ist eine Funktion

$$f: E \longrightarrow F$$

mit der Eigenschaft, dass  $f(e_1) \neq f(e_2)$  für je zwei adjazente Kanten  $e_1$  und  $e_2$  aus  $E$  gilt.

Die Problemstellung lautet hier: Gibt es zu gegebenen  $G$  und  $F$  eine Kantenfärbung?

Wie im vorigen Abschnitt existiert zu jedem Graphen  $G$  eine charakteristische Zahl, die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , für die es zu  $G$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  eine Kantenfärbung gibt, der sogenannte *chromatische Index*  $i(G)$ .

Auch hier hat man eine triviale Abschätzung:

$$\Delta(G) \leq i(G) \leq \max(0, 2\Delta(G) - 1) \quad (3)$$

Die linke Seite gilt, da es einen Knoten gibt, an dem genau  $\Delta(G)$  Kanten hängen, die alle verschieden gefärbt werden müssen. Andererseits hängen an jedem der beiden Endpunkte einer Kante  $e$  höchstens  $\Delta(G) - 1$  zu  $e$  adjazente Kanten, somit hat man  $i(G) \leq 2\Delta(G) - 1$ , falls überhaupt eine Kante existiert. Ansonsten ist  $\Delta(G) = 0$ , somit hat man die rechte Ungleichung.

Man kann die Ungleichung übrigens verschärfen. Nach Vizings Theorem (vgl. [2]) gilt nämlich:

$$\Delta(G) \leq i(G) \leq \Delta(G) + 1$$

Somit kommen für den chromatischen Index eines gegebenen Graphen nur zwei Werte in Frage. Welche der beiden Möglichkeiten jedoch zutrifft, ist im allgemeinen nicht so leicht zu entscheiden. Wir wollen nur erwähnen, dass für einen Wald  $W$  immer  $i(W) = \Delta(W)$  gilt. Dazu stellt man sich die Bäume des Waldes als Wurzelbäume vor und färbt die Kanten stufenweise von den Wurzeln aus.

Nun wollen wir noch einsehen, dass das Kantenfärbungsproblem auf einem ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$  ein spezielles Knotenfärbungsproblem ist. Dazu definieren wir den sogenannten *Liniengraphen*  $G_L = (V_L, E_L)$  zu  $G$ . Dieser ist gegeben durch

$$(L1) \quad V_L := E$$

$$(L2) \quad E_L := \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid \exists u, v, w \in V : u \neq w \\ \wedge e_1 = (u, v) \wedge e_2 = (v, w)\}.$$

Er enthält somit als Knoten die Kanten des ursprünglichen Graphen, die in  $G_L$  dann durch Kanten verbunden werden, wenn sie im ursprünglichen Graphen  $G$  adjazent waren. Offensichtlich entspricht das Kantenfärbungsproblem auf  $G$  genau dem Knotenfärbungsproblem auf  $G_L$ .

Man mag sich fragen, ob jeder Graph Liniengraph eines anderen Graphen sein kann. Tatsächlich kann man diese Frage verneinen, d.h. Kantenfärbungsprobleme sind ein echter Spezialfall von Knotenfärbungsproblemen. Ein Gegenbeispiel ist der Graph  $W_3$ , der aus einem „Mittelknoten“ und drei „Außenknoten“ sowie drei Kanten besteht, wobei jeder Außenknoten durch genau eine Kante mit dem Mittelknoten verbunden sei. Wäre er der Liniengraph eines Graphen  $G$ , so müsste  $G$  genau vier Kanten haben, darunter eine „Mittelkante“, die adjazent zu allen weiteren Kanten sein müsste, und drei „Außenkanten“, die jeweils nur zur Mittelkante adjazent sein müssten. Ein solcher Graph  $G$  existiert jedoch nicht.

Andererseits können verschiedene Graphen zu dem selben Liniengraphen führen. Als Beispiel seien die Graphen  $W_3$  (wie oben definiert) und  $K_3$  genannt. Dabei verstehen wir unter  $K_3$  den Graphen, der aus drei Knoten und drei Kanten besteht. Sowohl  $W_3$  als auch  $K_3$  haben als Liniengraph  $K_3$ . Dass allerdings der Graph und der zugehörige Liniengraph identisch sind, wie im Falle von  $K_3$ , gilt nur in wenigen Trivialfällen.

## 2.3 Der dynamische Aspekt

Bei der Betrachtungsweise der vorigen beiden Abschnitte hatte man stets die Frage nach der Existenz einer Färbungsfunktion gestellt. Durch Angabe einer solchen kann man diese Frage beantworten. Wenn es keine Färbungsfunktion gibt, muss man alle theoretisch in Frage kommenden Funktionen auflisten und von diesen zeigen, dass sie keine zulässige Färbung sind. Kennzeichnend für diese Vorgehensweise ist die Gleichzeitigkeit, alle Knoten (bzw. Kanten) werden zur selben Zeit gefärbt.

Doch die menschliche Herangehensweise an solche Probleme ist eine andere. Der Mensch probiert nacheinander jeweils einem Knoten (bzw. einer Kante) eine Farbe zuzuordnen. Dies ist der dynamische Aspekt. Mathematisch formuliert, können wir eine Färbung des Graphen  $G = (V, E)$  auch als eine endliche Folge  $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$  auffassen, wobei die  $f_i$  aus einer Farbmenge  $F$  sind und  $n = \#V$  (bzw.  $n = \#E$ ). Wir können eine Folge  $f = (f_1, f_2, \dots, f_k)$  für

$0 \leq k \leq n$  eine *partielle Färbung* nennen. Eine partielle Färbung gibt also den aktuellen Stand des Färbungsprozesses wieder.

Mathematisch gesehen, ist dabei gar nichts passiert. Die bisher betrachteten Färbungsprobleme bleiben die gleichen, egal ob man nun alle Kanten zugleich färben soll oder der Reihe nach. Doch diese Vorstellung von einem dynamischen Färben wird uns zu der Idee von Färbungsproblemen auf gerichteten Graphen führen und später zu unserem eigentlichen Ziel, verschiedenen Zwei-Personen-Graphenfärbungsspielen.

## 2.4 Ein gerichtetes Knotenfärbungsproblem

Bisher mögen wir uns gefragt haben, wozu der Begriff von gerichteten Graphen eingeführt wurde. Der Grund ist der, dass wir auf gerichteten Graphen neben dem ungerichteten Knotenfärbungsproblem (fasse den gerichteten Graphen als ungerichteten auf) noch ein weiteres Färbungsproblem betrachten können. Dieses Problem besitzt einen dynamischen Aspekt.

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph und  $F$  eine Menge von Farben. Eine *Knotenfärbung von  $G$  bezüglich  $F$*  ist ein Paar  $(\pi, f)$ , wobei

$$\pi : \{1, 2, \dots, \#V\} \longrightarrow V$$

eine Permutation<sup>3</sup> der Knoten sei und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{\#V})$  eine Folge von Farben  $f_i \in F$  sei mit der Eigenschaft:

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, \#V\} \forall j < i : ((\exists e \in E : e = (\pi(j), \pi(i))) \implies f_i \neq f_j)$$

Anschaulich gesprochen bedeutet dies, dass man beim Färben eines Knotens nur die eingehenden inzidenten Kanten berücksichtigen muss, d.h. die Farbe verschieden von den Farben aller Anfangspunkte der eingehenden Kanten wählen muss, die Farbe darf aber durchaus gleich der Farbe des Endpunkts einer austretenden Kante sein. Dabei ist natürlich die Reihenfolge, in der gefärbt wird, gegeben durch  $\pi$ , von grundlegender Bedeutung.

Hier lautet das Problem: Gibt es zu gegebenen Graphen  $G$  und Farbmengen  $F$  eine Knotenfärbung  $(\pi, f)$ ?

Wie bei den vorher betrachteten Färbungsproblemen gibt es zu einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  eine kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , die sogenannte *gerichtete chromatische Zahl*  $\vec{\chi}(G)$ , so dass zu  $G$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  eine Knotenfärbung  $(\pi, f)$  existiert.

Wie beim ungerichteten Problem haben wir auch hier eine triviale Abschätzung:

$$0 \leq \vec{\chi}(G) \leq \Delta^+(G) + 1 \tag{4}$$

---

<sup>3</sup>Unter Permutation verstehen wir hier eine bijektive Abbildung.

Ferner gilt, falls man  $G$  als ungerichteten Graphen auffasst, also einfach die Orientierung der Kanten nicht beachtet:

$$\vec{\chi}(G) \leq \chi(G) \quad (5)$$

Zur Begründung beachte man, dass eine Färbung  $f$  im Sinne des ungerichteten Knotenfärbungsproblems zusammen mit einer beliebigen Permutation  $\pi$  eine Färbung  $(\pi, f)$  im Sinne des gerichteten Knotenfärbungsproblems darstellt.

Es gibt gerichtete Graphen, für die in (5) echte Ungleichheit herrscht. Als Beispiel diene der Graph  $K_2^g$ , der aus den beiden Knoten  $v$  und  $w$  sowie der Kante  $(v, w)$  besteht ( $\vec{\chi}(K_2^g) = 1$  aber  $\chi(K_2^g) = 2$ ).

## 2.5 Ein gerichtetes Kantenfärbungsproblem

Vollkommen analog kann man zu einem gerichteten Graphen  $G = (V, E)$  und einer Farbmenge  $F$  eine *Kantenfärbung von  $G$  bezüglich  $F$*  als Paar  $(\pi, f)$  definieren, wobei

$$\pi : \{1, 2, \dots, \#E\} \longrightarrow E$$

eine Permutation der Kanten und  $f = (f_1, f_2, \dots, f_{\#E})$  eine endliche Folge mit  $f_i \in F$  sind, die die Eigenschaft haben, dass die Farbe  $f_i$  jeder Kante  $\pi(i)$  verschieden von der Farbe aller vorher gefärbten in  $\pi(i)$  eingehenden Kanten  $\pi(j)$  ist. Hierbei ist „vorher gefärbt“ natürlich in Bezug auf  $\pi$  gemeint, d.h.  $j < i$ .

Das gerichtete Kantenfärbungsproblem lautet: Existiert zu  $G$  und  $F$  eine Kantenfärbung  $(\pi, f)$ ?

Interessant ist auch hier die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass es zu  $G$  und  $\{1, 2, \dots, n\}$  eine Kantenfärbung gibt. Sie wird als *gerichteter chromatischer Index*  $\vec{i}(G)$  bezeichnet.

Wieder haben wir ähnliche Abschätzungen wie in den vorigen Abschnitten:

$$\Delta^+(G) \leq \vec{i}(G) \leq \min(2\Delta^+(G), \max(0, 2\Delta(G) - 1)) \quad (6)$$

Man beachte hierbei, dass an einem Endpunkt einer Kante zwar nur bis zu  $\Delta^+(G) - 1$  eingehende Kanten hängen können, an ihrem Anfangspunkt jedoch sogar bis zu  $\Delta^+(G)$  viele. Dadurch kommt die etwas andere Abschätzung als in 2.2 zustande.

Und wenn wir  $G$  als ungerichteten Graphen auffassen, erhalten wir den Vergleich:

$$\vec{i}(G) \leq i(G) \quad (7)$$

Das gerichtete Kantenfärbungsproblem ist kein Spezialfall des gerichteten Knotenfärbungsproblems, sondern eine eigene Fragestellung, zumindestens im

Kontext der hier betrachteten Graphen. Aber wenn man in gerichteten Graphen Mehrfachkanten erlaubt (es genügen sogar schon entgegengesetzt gerichtete Doppelkanten), dann lässt sich das gerichtete Kantenfärbungsproblem mit einer analogen Konstruktion wie dem Liniengraphen auf ein gerichtetes Knotenfärbungsproblem zurückführen.

Sei darum (nur an dieser Stelle) ein gerichteter Graph  $G$  ein Paar  $(V, E)$  mit  $\#V < \infty$  und  $E \subseteq \{(v, w) \in V \times V \mid v \neq w\}$ , d.h. entgegengesetzt gerichtete Doppelkanten seien erlaubt. Dann wird der *gerichtete Liniengraph*  $G_L = (V_L, E_L)$  wie folgt definiert:

$$(L1) \quad V_L := E$$

$$(L2) \quad E_L := \{(e_1, e_2) \in E \times E \mid \exists u, v, w \in V : u \neq w \\ \wedge e_1 = (u, v) \wedge e_2 \in \{(v, w), (w, v)\}\}$$

Der gerichtete Liniengraph enthält also genau dann eine Kante, die von einer Kante  $e_1$  zu einer Kante  $e_2$  des ursprünglichen Graphen  $G$  gerichtet ist, wenn die beiden Kanten  $e_1$  und  $e_2$  adjazent sind und überdies noch  $e_1$  den gemeinsamen Knoten als Endpunkt hat. Nur genau in diesem Fall bewirkt die Kantenfärbung von  $e_1$  in  $G$  Einschränkungen der Färbungsmöglichkeiten von  $e_2$  in  $G$ ; und nur genau in diesem Fall bewirkt die Knotenfärbung von  $e_1$  in  $G_L$  Einschränkungen der Färbungsmöglichkeiten von  $e_2$  in  $G_L$ . Somit entsprechen den gerichteten Kantenfärbungen eines Graphen genau die gerichteten Knotenfärbungen seines gerichteten Liniengraphen.

Auch hier gilt, dass es gerichtete Graphen gibt, die nicht gerichtete Liniengraphen sind. Ein einfaches Beispiel ist der Graph, der aus den Knoten  $a$ ,  $b$  und  $c$ , sowie den Kanten  $(a, b)$  und  $(c, b)$  besteht.

## 3 Graphenfärbungsspiele

### 3.1 Allgemeine Graphenfärbungsspiele

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter oder ungerichteter Graph und  $F$  eine endliche Menge, die sogenannte *Farbmenge*. Die Elemente von  $F$  werden wir auch als *Farben* bezeichnen. Wir betrachten Spiele auf  $G$ , die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Zu jedem Zeitpunkt des Spiels ist jedes *Objekt* von  $G$  (Knoten oder Kante) entweder *ungefärbt* oder ihm ist genau eine Farbe aus  $F$  zugeordnet.
- (2) Zwei Spieler, die wir traditionellerweise *Alice* und *Bob* nennen,<sup>4</sup> führen abwechselnd jeweils eine positive Anzahl von Zügen durch, solange dies noch möglich ist. Die Anzahl von echten Zügen, die ein Spieler hintereinander ausführen muss, bevor der andere wieder echt zieht, soll dabei nicht vom Zufall abhängen, sondern nur von den deterministischen Regeln des Spiels oder von der Entscheidung des Gegenspielers (auszusetzen).
- (3) Ein *echter Zug* besteht darin, einem ungefärbten Objekt von  $G$  aus einer diesem Zug durch deterministische Regeln zugeordneten *Objektmenge* in *zulässiger* Weise eine Farbe aus  $F$  zuzuordnen. Ein *Zug* ist entweder ein echter Zug oder besteht darin auszusetzen.
- (4) Aussetzen ist für höchstens einen der Spieler erlaubt.
- (5) Das Ende des Spiels ist der Zeitpunkt, zu dem kein weiterer Zug mehr möglich ist.
- (6) *Maker-Breaker-Eigenschaft*: Alice gewinnt, wenn am Ende des Spiels alle Objekte einer bestimmten Objektmenge gefärbt sind, sonst gewinnt Bob.

Wir reden von einem *Knotenfärbungsspiel*, wenn im Verlauf des Spiels alle Kanten ungefärbt bleiben sowie die Objektmengen in (3) und (6) Teilmengen von Knoten sind.

---

<sup>4</sup>Die Namen *Alice* und *Bob* tauchen nicht nur in der Spieltheorie als Namen von zwei Spielpartnern auf. Auch in der Kryptographie sind diese Namen sehr beliebt. Dort werden so zwei Personen genannt, die miteinander kommunizieren, sprich Geheimbotschaften austauschen. In dem Modell gibt es dann noch eine dritte Person, meist *Eve* genannt, die die Kommunikation von Alice und Bob abhört oder sogar verändert (z.B. bei einem sogenannten „Man-in-the-Middle-Attack“, bei dem Alice und Bob glauben, mit dem jeweils anderen zu kommunizieren, in Wirklichkeit jedoch nur Botschaften von Eve empfangen, die alle anderen Nachrichten abfängt).



Analog heißt ein Spiel *Kantenfärbungsspiel*, wenn im Verlauf des Spiels alle Knoten ungefärbt bleiben sowie die Objektmengen in (3) und (6) Teilmengen von Kanten sind.

Typischerweise sind zu Beginn des Spieles alle Objekte ungefärbt, doch vorstellbar sind auch Spiele, bei denen schon gewisse Objekte vorgefärbt sind.

Meist wird die Anzahl von Zügen, die ein Spieler hintereinander ausführen muss, gleich 1 sein, es sei denn sein Gegenspieler setzt aus. Doch es wurden auch schon interessante Spiele betrachtet, in denen der eine Spieler jeweils einen und der andere drei Züge hintereinander an der Reihe war (vgl. [9]).

Bei den Spielen, die wir betrachten werden, beschränken wir uns auf solche, bei denen die Objektmengen in (3) und (6) jeweils die gesamte Knoten- bzw. Kantenmenge sind.

Der in (3) benutzte Begriff der *Zulässigkeit* wird für jedes Spiel das wesentlichste Unterscheidungsmerkmal darstellen. Je nachdem, wie er präzisiert wird, führt er zu interessanten, trivialen oder komplizierten Spielen. In dieser Arbeit wird diese Präzisierung im Wesentlichen auf vier verschiedene, sehr natürliche Arten geschehen.

Die Forderung (4) ist eine Endlichkeitsforderung: Würde man beiden Spielern erlauben, beliebig oft hintereinander auszusetzen, so könnte das Spiel unendlich lange dauern. Deshalb erzwingen wir durch (4), in Verbindung mit (2) und (3), die Endlichkeit des Spiels, denn der Spieler, der nicht aussetzen darf, muss, sobald er an der Reihe ist, mindestens einen Zug ausführen, d.h. ein Objekt färben. Somit gibt es spätestens nach  $\#V + \#E$  Zügen dieses Spielers kein zulässig färbbares Objekt mehr, so dass (nach einem möglichen Aussetzen endlicher Dauer des Gegenspielers) kein Zug mehr erlaubt ist, was nach (5) das Ende des Spiels bedeutet.

Man beachte, dass für solche Spiele die Irreversibilität der Züge charakteristisch ist, d.h. einmal gefärbte Objekte dürfen später nicht mehr „umgefärbt“ oder „entfärbt“ werden.

## 3.2 Gewinnstrategien

Immer wenn Spiele mathematisch betrachtet werden, fragt man sich nach der Existenz von Gewinnstrategien. Unter einer *Strategie* eines Spielers versteht man eine Liste, in der für jeden möglichen Spielstand vor einem Zug des betrachteten Spielers vermerkt ist, in welcher Art er seinen Zug ausführt. Diese Liste kann bei bestimmten Spielen auch unendlich viele Einträge haben. Eine *Gewinnstrategie* eines Spielers ist eine solche Strategie, nach der dieser Spieler immer gewinnt, wenn er gemäß ihren Regeln spielt, egal mit welchen Strategien alle anderen beteiligten Spieler spielen.

In der Regel müssen nicht immer Gewinnstrategien für auch nur irgend-einen Spieler existieren. Doch bei unseren Zwei-Personen-Graphenfärbungsspielen, bezogen auf einen festen Graphen  $G$  und eine vorgegebene endliche Farbmenge  $F$ , in denen die Anzahl der Züge beschränkt ist, hat natürlich genau einer der beiden Spieler eine Gewinnstrategie. Wir sagen dann, der Spieler habe eine *Gewinnstrategie auf  $G$  mit Farbmenge  $F$*  oder, wenn in dem betrachteten Spiel die Namen der Farben keine Rolle spielen, eine *Gewinnstrategie mit  $\#F$  Farben*.

### 3.3 Die Spielchromatische Zahl $Z_S(G)$

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Graph (der evtl. als ungerichtet aufgefasst werde). Sei  $S$  ein Spiel, das den Forderungen (1) bis (6) aus 3.1 genügt, und welches für jede beliebige Farbmenge  $F \subseteq \mathbb{N}$  mit  $\#F < \infty$  auf  $G$  gespielt werden kann. Wir definieren nun den wesentlichsten Begriff dieser Arbeit:

Die zu  $S$  gehörige *spielchromatische Zahl*  $Z_S(G)$  von  $G$  ist die kleinste ganze Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass Alice eine Gewinnstrategie für das Spiel  $S$ , gespielt auf  $G$ , mit der Farbmenge  $F = \{1, 2, 3, \dots, n\}$  hat, falls ein solches  $n$  existiert, ansonsten wird  $Z_S(G) := \infty$  definiert.

Wir können analog definieren:

Die zu  $S$  gehörige *OBERE spielchromatische Zahl*  $Z_S^{-1}(G)$  von  $G$  ist das Supremum der Zahlen  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass Bob eine Gewinnstrategie für das Spiel  $S$ , gespielt auf  $G$ , mit der Farbmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  hat, falls überhaupt solche  $n$  existieren, ansonsten wird  $Z_S^{-1}(G) := -1$  definiert.

Die beiden gerade definierten Größen stehen in folgendem Zusammenhang:

$$Z_S(G) \leq Z_S^{-1}(G) + 1$$

Das Spiel  $S$  heißt *schön*, wenn

$$Z_S(G) = Z_S^{-1}(G) + 1$$

für jeden beliebigen Graphen  $G$  gilt, wobei wir die Konvention  $\infty + 1 := \infty$  treffen.

BEISPIEL: Sei  $S_0$  das Knotenfärbungsspiel, bei dem Bob die Knoten mit beliebigen Farben aus der Farbmenge  $F$  färben darf, Alice jedoch einen Knoten nur dann färben darf, wenn in dem Spielverlauf vorher von beiden Spielern höchstens eine Farbe benutzt wurde. Aussetzen sei nicht erlaubt. Bob habe den ersten Zug, es werde abwechselnd jeweils ein Zug gespielt. Alice gewinnt, wenn am Ende des Spiels alle Knoten gefärbt sind. Sei  $G_0$  ein Graph mit mindestens 4 Knoten. Dann hat Alice offenbar genau dann eine Gewinnstrategie, wenn  $\#F = 1$  gilt. Somit gilt:

$$Z_{S_0}(G_0) = 1 \quad \text{und} \quad Z_{S_0}^{-1}(G_0) = \infty,$$

dies bedeutet, dass  $S_0$  nicht schön ist.

Derart uninteressante und entartete Spiele wollen wir eigentlich gar nicht betrachten. Das Beispiel verdeutlicht, dass die sechs Forderungen an die Spiele doch recht allgemein gehalten sind, und dass danach tatsächlich auch ziemlich „unnatürliche“ Spiele erlaubt sind. Im Unterabschnitt 3.4 werden wir unter anderem aber auch schöne Spiele kennenlernen, wie in 3.10 gezeigt werden wird.

### 3.4 Acht verschiedene Spielarten

Wir betrachten nun Zwei-Personen-Nullsummen-Spiele der folgenden Arten auf einem Graphen  $G = (V, E)$  bezüglich einer Farbmenge  $F$ :

Am Anfang sei der Graph ungefärbt. Alice und Bob färben abwechselnd (bei einem Knotenfärbungsspiel) jeweils einen ungefärbten Knoten bzw. (bei einem Kantenfärbungsspiel) jeweils eine ungefärbte Kante von  $G$ . Welchen Knoten bzw. welche Kante sie auswählen, ist ihnen freigestellt. Dabei dürfen sie nur Farben aus  $F$  benutzen, und die benutzte Farbe muss unter Berücksichtigung aller Nachbarknoten bzw. adjazenter Kanten zulässig sein. Den Begriff „zulässig“ werden wir im Anschluss präzisieren.

Das Spiel hört auf, wenn ein Spieler nicht mehr ziehen kann, d.h. wenn keiner der verbleibenden ungefärbten Knoten bzw. keine der Kanten mehr zulässig gefärbt werden kann. Falls bei Ende des Spieles alle Knoten bzw. Kanten gefärbt sind, so hat Alice gewonnen, ansonsten siegt Bob.

Wir unterscheiden zunächst vier verschiedene *Spielarten*:

#### 3.4.1 Das ungerichtete Knotenfärbungsspiel (UKnot)

Hierbei wird  $G$  als ungerichtet aufgefasst und es werden die Knoten gefärbt.

Die Färbung eines Knotens in der Farbe  $f \in F$  ist *zulässig*, wenn sämtliche gefärbten Nachbarknoten nicht mit  $f$  gefärbt sind.

#### 3.4.2 Das ungerichtete Kantenfärbungsspiel (UKant)

Hierbei wird  $G$  als ungerichtet aufgefasst und es werden die Kanten gefärbt.

Die Färbung einer Kante  $e$  in der Farbe  $f \in F$  ist *zulässig*, wenn sämtliche gefärbten, zu  $e$  adjazenten Kanten nicht mit  $f$  gefärbt sind.

### 3.4.3 Das gerichtete Knotenfärbungsspiel (GKnot)

Hierbei ist  $G$  gerichtet und es werden die Knoten gefärbt.

Die Färbung eines Knotens  $v$  in der Farbe  $f \in F$  ist *zulässig*, wenn sämtliche adjazenten Knoten  $w$ , für die es eine Kante  $(w, v)$  gibt (der andere Fall wäre  $(v, w)$ !!!), nicht mit  $f$  gefärbt sind.

### 3.4.4 Das gerichtete Kantenfärbungsspiel (GKant)

Hierbei ist  $G$  gerichtet und es werden die Kanten gefärbt.

Die Färbung einer Kante  $e$  in der Farbe  $f \in F$  ist *zulässig*, wenn sämtliche gefärbten, in  $e$  eingehenden Kanten nicht mit  $f$  gefärbt sind. *Hier werden im Unterschied zum ungerichteten Kantenfärbungsspiel die gefärbten austretenden Kanten nicht berücksichtigt.*

### 3.4.5 Bemerkungen

Alice wird also versuchen, möglichst kooperativ zu spielen, damit von beiden Spielern lokal so wenig Farben wie möglich verbraucht werden. Bob dagegen wird möglichst destruktiv spielen und versuchen, ungefärbte Knoten bzw. Kanten mit einer möglichst großen Zahl verschiedenfarbiger Nachbarknoten bzw. adjazenter Kanten zu umgeben.

Auf ungerichteten Graphen können wir nur **(UKnot)** und **(UKant)** spielen, auf gerichteten Graphen sind alle Spielarten möglich.

Diese Spielarten sind die spieltheoretischen Varianten der in Abschnitt 2 definierten Färbungsprobleme. Man mache sich klar, dass bei einem Spiel aber eine deutlich kompliziertere Problemstellung vorliegt, als bei den entsprechenden Färbungsproblemen. Komplexitätsuntersuchungen für ähnliche Probleme (vgl. [3]) belegen dies. Allerdings sind solche Komplexitätsuntersuchungen mit Vorsicht zu genießen. Sie hängen alle von der bis heute ungeklärten Frage ab, ob  $\mathcal{NP} \neq \mathcal{PSPACE}$  ist, wie stark vermutet wird. Falls letztere Vermutung widerlegt würde, so wäre der Rechenaufwand zur Lösung von Färbungsproblemen und Färbungsspielen gleich bis auf polynomielle Faktoren.

Chen, Schelp und Shreve [5] führten ein „neues“ ungerichtetes Knotenfärbungsspiel ein, das genau wie **(UKnot)** gespielt wird, mit folgender Zusatzregel:

- (N) Bob darf nur Farben benutzen, die bislang im Verlauf des Spiels benutzt wurden, es sei denn, dies ist nicht mehr zulässig möglich.

Hier wird diese Idee aufgegriffen und zu den obigen Spielarten werden entsprechende „neue“ Varianten definiert:

### 3.4.6 Das ungerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel (NeuUKnot)

Genau wie (UKnot), aber mit Regel (N).

### 3.4.7 Das ungerichtete „neue“ Kantenfärbungsspiel (NeuUKant)

Genau wie (UKant), aber mit Regel (N).

### 3.4.8 Das gerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel (NeuGKnot)

Genau wie (GKnot), aber mit Regel (N).

### 3.4.9 Das gerichtete „neue“ Kantenfärbungsspiel (NeuGKant)

Genau wie (GKant), aber mit Regel (N).

## 3.5 Verwandtschaften durch Liniengraph

Wie bei den Färbungsproblemen, so gilt auch bei den Kantenfärbungsspielen (UKant), (NeuUKant), (GKant) bzw. (NeuGKant), dass sie den zugehörigen Knotenfärbungsspielen (UKnot), (NeuUKnot), (GKnot) bzw. (NeuGKnot), gespielt auf dem Liniengraphen (bzw. gerichteten Liniengraphen) des ursprünglichen Graphen, entsprechen. Man vergleiche hierzu 2.2 bzw. 2.5.

## 3.6 Explizite Spiele

Es hatte einen Grund, weshalb in 3.4 nur von „Spielarten“ und nicht von „Spielen“ geredet wurde. Damit diese Spielarten zu expliziten Spielen werden, müssen noch zwei Fragen geklärt werden:

1. Welcher Spieler hat den ersten Zug?
2. Welchem Spieler ist es erlaubt auszusetzen, oder ist es keinem erlaubt?

Man beachte, dass nach (4) höchstens einer der Spieler aussetzen darf.

Sei  $(Sp)$  eine der acht in 3.4 definierten Spielarten. Sei  $\{A, -, B\}$  für den Rest dieser Arbeit eine dreielementige Menge. Dann wird das Spiel  $(Sp)[X, Y]$  mit  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$  folgendermaßen definiert:

$(Sp)[X, Y]$  ist von der Art  $(Sp)$  und es gelten die Zusatzregeln:

- Alice hat den ersten Zug, falls  $X = A$ .
- Bob hat den ersten Zug, falls  $X = B$ .
- Alice darf einmal oder mehrmals aussetzen, falls  $Y = A$ .
- Bob darf einmal oder mehrmals aussetzen, falls  $Y = B$ .
- Keiner der Spieler darf aussetzen, falls  $Y = -$ .

Man beachte, dass Aussetzen auch die Möglichkeit beinhaltet, auf den ersten Zug zu verzichten.

Somit induziert jede Spielart 6 explizite Spiele. Diese insgesamt 48 Spiele sind diejenigen, die in dieser Arbeit von Interesse sind.

### 3.7 Spielchromatische Zahlen und Indizes

In diesem Abschnitt werden einige wichtige Kurzschreibweisen eingeführt. Seien hierzu  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Sei  $G$  ein gerichteter Graph, der evtl. als ungerichtet aufgefasst werde. Dann werden

- die *ungerichtete*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Zahl* von  $G$  durch

$$\chi_{[X, Y]}(G) := Z_{(\mathbf{UKnot})[X, Y]}(G),$$

- der *ungerichtete*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Index* von  $G$  durch

$$i_{[X, Y]}(G) := Z_{(\mathbf{UKant})[X, Y]}(G),$$

- die *gerichtete*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Zahl* von  $G$  durch

$$\vec{\chi}_{[X, Y]}(G) := Z_{(\mathbf{GKnot})[X, Y]}(G),$$

- der *gerichtete*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Index* von  $G$  durch

$$\vec{i}_{[X, Y]}(G) := Z_{(\mathbf{GKant})[X, Y]}(G),$$

- die *ungerichtete „neue“*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Zahl* von  $G$  durch

$$\chi_{[X, Y]}^*(G) := Z_{(\mathbf{NeuUKnot})[X, Y]}(G),$$

- der *ungerichtete „neue“*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Index* von  $G$  durch

$$i_{[X,Y]}^*(G) := Z_{(\mathbf{NeuUKant})[X,Y]}(G),$$

- die *gerichtete „neue“*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Zahl* von  $G$  durch

$$\vec{\chi}_{[X,Y]}^*(G) := Z_{(\mathbf{NeuGKnot})[X,Y]}(G),$$

- und der *gerichtete „neue“*  $[X, Y]$ -*spielchromatische Index* von  $G$  durch

$$\vec{i}_{[X,Y]}^*(G) := Z_{(\mathbf{NeuGKant})[X,Y]}(G)$$

erklärt. Wenn klar oder unwichtig ist, welche Werte  $X$  bzw.  $Y$  haben, werden im weiteren auch die Terme „ $[X, Y]$ –“ in den ohnehin schon relativ langen Bezeichnungen weggelassen. Oft sprechen wir auch einfach von *spielchromatischen Indizes*, wenn wir sowohl die ungerichteten als auch die gerichteten meinen.

Die Bezeichnungen erweitern weitgehend die in der Literatur gebräuchlichen. Ausnahme ist der Gebrauch von  $i$  statt  $\chi'$ .

Offensichtlich gelten

$$\begin{aligned} \chi_{[X,Y]}^*(G) &\leq \chi_{[X,Y]}(G), & i_{[X,Y]}^*(G) &\leq i_{[X,Y]}(G), \\ \vec{\chi}_{[X,Y]}^*(G) &\leq \vec{\chi}_{[X,Y]}(G), & \vec{i}_{[X,Y]}^*(G) &\leq \vec{i}_{[X,Y]}(G), \end{aligned}$$

Ferner haben wir analog zu den Abschätzungen aus 2 folgende triviale Abschätzungen

$$\begin{aligned} 0 &\leq \chi(G) \leq \chi_{[X,Y]}^*(G) \leq \chi_{[X,Y]}(G) \leq \Delta(G) + 1 \\ \Delta(G) &\leq i(G) \leq i_{[X,Y]}^*(G) \leq i_{[X,Y]}(G) \leq \max(0, 2\Delta(G) - 1) \\ 0 &\leq \vec{\chi}(G) \leq \vec{\chi}_{[X,Y]}^*(G) \leq \vec{\chi}_{[X,Y]}(G) \leq \Delta^+(G) + 1 \\ \Delta^+(G) &\leq \vec{i}(G) \leq \vec{i}_{[X,Y]}^*(G) \leq \vec{i}_{[X,Y]}(G) \leq 2\Delta^+(G) \end{aligned}$$

### 3.8 Spielchromatische Zahlen von Graphenklassen

Sei  $S$  eines der betrachteten Spiele und sei  $\mathcal{K}$  eine nichtleere Klasse von Graphen. Dann definieren wir die *zu  $S$  gehörige spielchromatische Zahl*  $Z_S(\mathcal{K})$  von  $\mathcal{K}$  als

$$Z_S(\mathcal{K}) := \sup_{G \in \mathcal{K}} Z_S(G).$$

Dieser Wert liegt in  $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ .

Seien  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Dann können wie in 3.7

$$\chi_{[X,Y]}(\mathcal{K}), \quad i_{[X,Y]}(\mathcal{K}), \quad \vec{\chi}_{[X,Y]}(\mathcal{K}), \quad \vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{K}),$$

$$\chi_{[X,Y]}^*(\mathcal{K}), \quad i_{[X,Y]}^*(\mathcal{K}), \quad \vec{\chi}_{[X,Y]}^*(\mathcal{K}) \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[X,Y]}^*(\mathcal{K})$$

für eine nichtleere Graphenklasse  $\mathcal{K}$  erklärt werden.

Ist  $Z_S(\mathcal{K}) = n \in \mathbb{N}$  für eine nichtleere Graphenklasse  $\mathcal{K}$ , so besagt dies einerseits, dass Alice im Spiel  $S$  auf jedem  $G \in \mathcal{K}$  eine Gewinnstrategie mit  $m_G$  Farben hat, wobei  $m_G \leq n$  ist, und andererseits, dass es mindestens einen Graphen  $G_0 \in \mathcal{K}$  gibt, auf dem Bob im Spiel  $S$  für jedes  $i \leq n - 1$  eine Gewinnstrategie mit  $i$  Farben hat.

### 3.9 Normale Spielarten

Sei  $(Sp)$  eine Spielart.  $(Sp)$  heißt *normal*, wenn für jeden gerichteten Graphen  $G$  gilt:

$$Z_{(Sp)[A,A]}(G) \left\{ \begin{array}{l} \leq Z_{(Sp)[A,-]}(G) \leq Z_{(Sp)[A,B]}(G) \leq \\ \leq Z_{(Sp)[B,A]}(G) \leq Z_{(Sp)[B,-]}(G) \leq \end{array} \right\} Z_{(Sp)[B,B]}(G)$$

Satz 1

Die Spielarten **(UKnot)**, **(UKant)**, **(GKnot)**, **(GKant)**, **(NeuUKnot)**, **(NeuUKant)**, **(NeuGKnot)** und **(NeuGKant)** sind normal.

**Beweis:**

Der Beweis geht für alle Spielarten gleich, zum Beispiel ist für das Spiel **(UKnot)** und einen Graphen  $G$  zu beweisen:

$$\chi_{[A,A]}(G) \left\{ \begin{array}{l} \stackrel{(1)}{\leq} \chi_{[A,-]}(G) \stackrel{(2)}{\leq} \chi_{[A,B]}(G) \stackrel{(3)}{\leq} \\ \stackrel{(4)}{\leq} \chi_{[B,A]}(G) \stackrel{(5)}{\leq} \chi_{[B,-]}(G) \stackrel{(6)}{\leq} \end{array} \right\} \chi_{[B,B]}(G)$$

Hierbei gibt es zwei Arten von Ungleichungen. Bei (3) und (4) besteht der Unterschied zwischen den zu den spielchromatischen Zahlen zugehörigen Spielen in der Regel, welcher Spieler beginnt. Man beachte, dass in diesen Fällen einer der Spieler das Recht zum Aussetzen hat. Für den Beweis von (3) ist es offensichtlich, dass, wenn Bob eine Gewinnstrategie mit  $n$  Farben für **(UKnot)** $[A, B]$  hat, er ebenfalls eine Gewinnstrategie mit  $n$  Farben für **(UKnot)** $[B, B]$  hat, weil er im zweiten Spiel selbst entscheiden kann, ob er den ersten Zug spielen möchte oder nicht, falls  $G$  einen Knoten enthält. (Falls  $G$  keinen Knoten besitzt, so ist die Aussage trivial.) So wird (3) bewiesen.



Die andere Art von Ungleichungen sind (1), (2), (5) und (6). In diesen Fällen besteht der Unterschied zwischen den verglichenen Spielen in der Regel, ob ein gewisser Spieler aussetzen darf oder nicht. Wir beweisen exemplarisch (2). Wenn Bob eine Gewinnstrategie mit  $n$  Farben für **(UKnot)** $[A, -]$  hat, hat er ebenfalls eine für **(UKnot)** $[A, B]$ , da er in dem zweiten Spiel keinen Gebrauch von seinem Recht auszusetzen machen braucht, bis auf seinen letzten Zug. Am Ende des Spiels wird er eventuell gezwungen sein, auszusetzen, doch dies ändert nichts mehr daran, wer gewinnt. Dies beweist (2).  $\square$

### 3.10 Schöne Spiele

Satz 2	Die Spiele der Arten <b>(NeuUKnot)</b> , <b>(NeuUKant)</b> , <b>(NeuG-Knot)</b> und <b>(NeuGKant)</b> sind schön.
--------	---

**Beweis:**

Sei  $G$  ein Graph, auf dem eines dieser Spiele gespielt werde. Nehmen wir an, dass Alice eine Gewinnstrategie mit  $n$  Farben hat. Zu zeigen ist, dass Alice eine Gewinnstrategie mit  $n + 1$  Farben hat.

Alice nimmt als neue Strategie einfach die alte Strategie, d.h. sie benutzt nur die ersten  $n$  Farben. Da die alte Strategie eine Gewinnstrategie war, wird Bob niemals gezwungen sein, die letzte Farbe zu benutzen, somit hat er nur die gleichen Möglichkeiten, wie gegen Alices alte Strategie. Also ist die neue Strategie ebenfalls eine Gewinnstrategie.  $\square$

Für die Spiele der anderen Arten ist dagegen eine analoge Aussage keineswegs so offensichtlich. Bisher hat noch niemand eine vergleichbare Aussage zeigen oder widerlegen können. Dies ist deshalb von besonderer Bedeutung, da uns gerade die Spiele der anderen Arten in erster Linie interessieren.

Falls die entsprechende Aussage für solch ein Spiel  $S$  falsch wäre, d.h. falls die zu  $S$  gehörige obere spielchromatische Zahl eines Graphen  $G$  größer als die zu  $S$  gehörige spielchromatische Zahl von  $G$  wäre, so liegt in der Untersuchung der spielchromatischen Zahlen nur ein Teil der Wahrheit. Dann müsste man ebenfalls noch die oberen spielchromatischen Zahlen untersuchen und bei allen Zwischenwerten feststellen, ob für diese Anzahl von Farben Alice oder Bob eine Gewinnstrategie hat.

An dieser Stelle soll kurz erläutert werden, was das Problem ist, analog zum Beweis des vorigen Satzes aus einer Gewinnstrategie beim Spiel  $S$  für Alice mit  $n$  Farben eine solche mit  $n + 1$  Farben zu konstruieren. Sei  $S$  z.B. das Spiel **(UKnot)** $[B, B]$ . Angenommen, Alice habe eine Gewinnstrategie beim

Spiel  $S$  für einen Graphen  $G$  bezüglich der Farbmengemenge  $F$ . Nun werde  $S$  auf  $G$  mit Farbmengemenge  $F \cup \{a\}$ ,  $a \notin F$  gespielt. Solange Bob nur mit Farben aus  $F$  spielt, antwortet Alice mit ihrer gewöhnlichen Strategie. Falls Bob einen Knoten mit  $a$  färbt, so hätte er diesen Knoten auch mit einer anderen Farbe  $b$  färben können. Alice stellt sich vor, der Knoten sei mit  $b$  gefärbt und antwortet dementsprechend nach der alten Gewinnstrategie. Nun kann das Problem auftreten, dass Bob einen Nachbarknoten des mit  $a$  gefärbten Knotens (der in der Vorstellung von Alice mit  $b$  gefärbt ist) später eventuell mit  $b$  färben kann. Dann liegt in der Vorstellung von Alice eine nicht zulässige Spielsituation vor, in der sie keine passende (alte) Gewinnstrategie hat. Was nun?

Bei Wäldern  $W$  mit  $\Delta(W) \leq 3$  spielt das oben angesprochene offene Problem keine Rolle. Bei Kantenfärbungsspielen auf solch einem  $W$  wird Alice z.B. immer eine Gewinnstrategie mit  $n \geq i_{[X,Y]}(W)$  Farben besitzen, wie aus den Beweisen in 6 und 9 ersichtlich sein wird.

### 3.11 Unterschied von chromatischen und spielchromatischen Zahlen

Satz 3

Es existiert keine absolute Konstante  $c \in \mathbb{R}_+$ , so dass für jeden Graphen  $G$  gilt:

$$\chi_{[A,-]}(G) - \chi(G) < c$$

**Beweis:**

Man betrachte die Folge  $(M_{t,t})_{t \geq 4}$  der Graphen  $M_{t,t} = (V_t, E_t)$ , die aus den vollständigen bipartiten Graphen  $K_{t,t}$  durch Weglassen der Kanten eines perfekten Matchings entstehen. Genauer sind also

$$\begin{aligned} V_t &:= \{v_1, v_2, \dots, v_t\} \dot{\cup} \{w_1, w_2, \dots, w_t\} \\ E_t &:= \{(v_i, w_j) \mid i \neq j\} \end{aligned}$$

Offenbar ist  $\chi(M_{t,t}) = 2$ .

Aber  $\chi_{[A,-]}(M_{t,t}) \geq t$ , denn Bob hat als einfache Gewinnstrategie mit weniger als  $t$  Farben diejenige, dass, wenn Alice einen Knoten  $v_i$  färbt, er  $w_i$  in der gleichen Farbe färbt, und umgekehrt. Somit kann es solch eine Konstante nicht geben.<sup>5</sup> □

---

<sup>5</sup>Das Beispiel stammt von Kierstead [14], der damit zeigt, dass für einen Teilgraphen  $G'$  eines Graphen  $G$  nicht zwangsläufig  $\chi_{[A,-]}(G') \leq \chi_{[A,-]}(G)$  gelten muss. Bei ihm waren  $G = K_{t,t}$  und  $G' = M_{t,t}$ .

### 3.12 Bisherige Ergebnisse

Obwohl Graphenfärbungsprobleme in der Mathematik seit Mitte des 19. Jahrhunderts intensiv studiert wurden, ist doch die Idee, diesen Problemen einen spieltheoretischen Hintergrund zu unterlegen, sehr viel jüngeren Datums. Als erster, zumindest nach dem Stand der internationalen Literatur, erfand Bodlaender [3] 1991 verschiedene Graphenfärbungsspiele, darunter auch das in dieser Arbeit als **(UKnot)** $[A, -]$  bezeichnete ungerichtete Knotenfärbungsspiel unter dem Namen *coloring construction game*, und führte die zugehörige spielchromatische Zahl  $\chi_{[A, -]}(G)$  als *game-chromatic number* ein. Der letzte Begriff setzte sich dann, abgesehen von dem Bindestrich, in der späteren Literatur durch. Das Hauptinteresse Bodlaenders lag jedoch auf Komplexitätsuntersuchungen für die Entscheidungsprobleme, ob Alice in einem bestimmten Spiel eine Gewinnstrategie hat. In einer Schlussbemerkung zeigte Bodlaender die Existenz eines Baumes  $B$  mit  $\chi_{[A, -]}(B) \geq 4$ .

Die eigentliche Geschichte der Erforschung der spielchromatischen Zahlen begann 1993 mit dem grundlegenden Artikel von Faigle, Kern, Kierstead und Trotter [9]. Hier wurde unter anderem für jeden Baum  $B$  gezeigt, dass  $\chi_{[A, -]}(B) \leq 4$  ist, ferner wurden Resultate für Graphen, die als Vereinigung von zwei Bäumen entstehen, sowie für Intervallgraphen  $I$  angegeben. Zum Beispiel gilt  $\chi_{[A, -]}(I) \leq 3\omega(I) - 2$ , wobei  $\omega(I)$  die Anzahl der Knoten in der größten Clique von  $I$  bezeichnet. Weiterhin wurde ein modifiziertes Spiel auf Bäumen diskutiert.

Mit einem gewaltigen Formelapparat bewiesen Kierstead und Trotter [15] im Jahre 1994, dass für planare Graphen  $P$  die Abschätzung  $\chi_{[A, -]}(P) \leq 33$  gilt, sowie als allgemeines Resultat, dass  $\chi_{[A, -]}(E_n) \leq g(n)$  für jeden Graphen  $E_n$ , der in eine kompakte orientierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht  $n$  einbettbar ist, wobei die Funktion  $g$  nur von  $n$  abhängt. Allerdings wurde nur die Existenz von  $g$  gezeigt, außer  $g(0) = 33$  wurden keine weiteren Werte ermittelt. Selbst die obere Abschätzung für planare Graphen ließ eine weite Lücke zu dem von Kierstead und Trotter angegebenen Beispiel eines planaren Graphen  $P_0$  mit  $\chi_{[A, -]}(P_0) = 7$ .

1997 führten Chen, Schelp und Shreve [5] das Spiel **(NeuUKnot)** $[A, -]$  und die zugehörige ungerichtete „neue“ spielchromatische Zahl  $\chi_{[A, -]}^*(G)$  ein. Sie untersuchten den Zusammenhang zwischen  $\chi(G)$  und  $\chi_{[A, -]}^*(G)$  und bestimmten die exakten Werte  $\chi_{[A, -]}^*(B)$  für jeden Baum  $B$ . Ferner wurden  $k$ -induktive Graphen von ihnen behandelt.

Mit einer Modifikation der im Fall von Bäumen so gut funktionierenden Strategie gingen 1999 Guan und Zhu [10] an außerplanare Graphen heran und bewiesen  $\chi_{[A, -]}(G) \leq 7$  für einen solchen Graphen  $G$ . Allerdings konnten sie nicht beweisen, dass die Schranke scharf ist.

Ebenfalls 1999 verbesserten Dinski und Zhu [7] die obere Abschätzung für planare Graphen  $P$  auf  $\chi_{[A,-]}(P) \leq 30$ . Weiterhin fanden sie die explizite obere Schranke  $\chi_{[A,-]}(G) \leq 16g^2 + 36g + 20$  für Graphen  $G$ , die in eine zusammenhängende kompakte orientierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht  $g$  einbettbar ist.

Zhu [21] veröffentlichte noch im selben Jahr die weitere drastische Verbesserung  $\chi_{[A,-]}(P) \leq 19$ . Er führte einen neuen Parameter, das *game coloring number*, ein. Dieser ist eine obere Schranke für die spielchromatische Zahl und gehört zu einem scheinbar einfacher zu diskutierenden Spiel. Die Idee des Beweises von Zhu besteht darin, das game coloring number abzuschätzen. Am Ende seines Artikels stellte Zhu einige offene Fragen heraus, darunter als *Question 1* die in 3.10 angesprochene grundsätzliche Frage, ob das Spiel **(UKnot)** $[A, -]$  schön ist.

Einen vorläufigen Schlusspunkt in der Bestimmung der spielchromatischen Zahl planarer Graphen  $P$  setzte im Jahr 2000 Kierstead [14], indem er die Schranke  $\chi_{[A,-]}(P) \leq 18$  nachwies. Mehr noch, er fand eine neue Methode zur Abschätzung des game coloring number, mit der er viele der bisher bekannten besten oberen Schranken der spielchromatischen Zahlen bestimmter Graphenklassen neu gewann. Der Vorteil seines Beweises liegt darin, dass er eine gemeinsame Basisstrategie angibt, die für sehr viele Graphenklassen funktioniert.

2000 bewies Zhu [22], dass ein (die Definition stammt von ihm)  $(a, b)$ -pseudo partial  $k$ -tree höchstens spielchromatische Zahl  $3k + 2a + b + 2$  hat. Damit war es ihm möglich,  $\chi_{[A,-]}(G)$  von Graphen  $G$ , die in eine zusammenhängende kompakte orientierbare 2-dimensionale Mannigfaltigkeit vom Geschlecht  $g \geq 1$  einbettbar sind, mit der oberen Schranke  $\left\lceil \frac{1}{2} (3\sqrt{1 + 48g} + 23) \right\rceil$  abzuschätzen, was eine deutliche Verbesserung gegenüber seines zusammen mit Dinski gefundenen Ergebnisses von 1999 darstellt.

In einem bislang nur elektronisch veröffentlichten Artikel aus dem Jahr 2000 untersuchten Nešetřil und Sopena [17] die spieltheoretische Variante der orientierten chromatischen Zahl. Diese orientierte spielchromatische Zahl erweist sich selbst für sehr einfache Graphenklassen als sehr schwierig zu bestimmen. Es wurde gezeigt, dass diese Größe für Pfade höchstens 7, für Bäume höchstens 19 und für außerplanare Graphen ebenfalls beschränkt ist. Das zu Grunde liegende Spiel ist nicht zu verwechseln mit den in dieser Arbeit definierten gerichteten Spielen, die auf einer vollkommen verschiedenen Idee basieren.

Eine Erweiterung des Horizonts erfuhr die gesamte Theorie im Jahr 2003 durch Chou, Wang und Zhu [6], die das bislang betrachtete ungerichtete Knotenfärbungsspiel **(UKnot)** $[A, -]$  verallgemeinerten, indem sie diesen Spielbegriff mit der Idee der relaxierten chromatischen Zahl kombinierten. Ihre

Ergebnisse erstrecken sich auf Bäume und außerplanare Graphen.

**Kantenfärbungsspiele** sind noch jüngeren Datums als Knotenfärbungsspiele. Grundsätzlich kann man Kantenfärbungsspiele als Knotenfärbungsspiele auf dem Liniengraphen verstehen (vgl. 2.2), bei gerichteten Spielen auf dem gerichteten Liniengraphen (vgl. 2.5). Insofern erscheint es überflüssig, eine eigene Theorie für Kantenfärbungsspiele aufzubauen. Doch der Liniengraph eines Graphen ist — selbst bei sehr einfachen Graphen — wesentlich komplizierter als der ursprüngliche Graph, so dass bislang kaum gute Ergebnisse für Spiele auf Liniengraphen vorliegen.

In einem im Jahre 2001 veröffentlichten Artikel befassten sich daher Cai und Zhu [4] mit dem von ihnen eingeführten Spiel **(UKant)** $[A, -]$ . Sie bewiesen  $i_{[A, -]}(G) \leq \Delta(G) + 3k - 1$  für  $k$ -degenerierte Graphen. Im Fall der speziellen Sorte von Bäumen mit maximalem Knotengrad 3 und einer ungeraden Anzahl von Kanten verbesserten sie die Abschätzung auf  $4 = \Delta(G) + 1$ .

Bislang unveröffentlicht ist der Artikel von He et al [12]. Die Autoren behaupten  $i_{[A, -]}(G) \leq 4$  für Bäume mit maximalem Knotengrad 3. Doch der wichtigste Beweisschritt enthält Fehler: es werden nämlich 6 Fälle in einer Fallunterscheidung nicht berücksichtigt. Die Aussage ist aber richtig, was Inhalt von 9 sein wird. Dort werden diese Fehler umgangen, wozu ein wesentlich komplizierterer Beweis notwendig ist.

Ein Artikel von Erdős, Faigle, Hochstättler und Kern [8] soll bald erscheinen. In ihm wird  $i_{[X, Y]}(W) \leq \Delta + 1$  für Wälder mit maximalem Knotengrad  $\Delta(W) \leq \Delta \geq 6$  gezeigt.

Erst elektronisch veröffentlicht ist der sich daran anschließende Artikel von Andres [1] aus dem Jahre 2003, der im Zusammenhang mit der vorliegenden Arbeit entstand. Dort wurde  $i_{[X, Y]}(W) \leq 6$  für Wälder mit maximalem Knotengrad  $\Delta(W) \leq 5$  gezeigt.



## Teil I

# Knotenfärbungsspiele auf verschiedenen Graphenklassen

## 4 Knotenfärbungsspiele auf Wäldern

### 4.1 Das ungerichtete Knotenfärbungsspiel auf Wäldern

Wenn wir das ungerichtete Knotenfärbungsspiel (**UKnot**) auf einem Wald  $W = (V, E)$  spielen, so zerlegt jeder Zug eines der beiden Spieler einen gewissen Teilbaum in mehrere Teile, die durch den gerade gefärbten Knoten geteilt werden. Was in einem Teil danach passiert, ist für den Spielverlauf in einem zweiten Teil im wesentlichen nicht mehr relevant.<sup>6</sup> Dies motiviert uns zu der folgenden Definition:

Ein *unabhängiger Teilbaum*  $T$  ist ein Teilbaum von  $W$  in einer bestimmten Spielsituation, dessen sämtliche gefärbte Knoten  $\text{Grad} \leq 1$  in  $T$  (nicht notwendigerweise in  $W$ ) haben, und der maximal mit dieser Eigenschaft ist.

Ein Zug zerlegt also einen unabhängigen Teilbaum in mehrere<sup>7</sup> neue unabhängige Teilbäume, wobei der gerade gefärbte Knoten in allen neuen Teilbäumen vorkommt, alle weiteren Knoten in genau einem.

Satz 4

(Faigle, Kern, Kierstead, Trotter) [3, 9]

Sei  $W$  ein ungerichteter Wald. Dann gilt:

$$\chi_{[B, B]}(W) \leq 4$$

#### Beweis:

Eine Gewinnstrategie für Alice mit 4 Farben sieht wie folgt aus: Alice

---

<sup>6</sup>Relevant ist dennoch die Tatsache, dass ein Spieler durch Fertigfärben des einen Teils den anderen Spieler eventuell zum Beginnen des Färbens des zweiten Teils zwingen kann. Falls wir also Gewinnstrategien suchen, sollten diese so geartet sein, dass sie nicht am eben genannten Umstand scheitern.

<sup>7</sup>Die Anzahl der neuen unabhängigen Teilbäume ist gerade  $\max(1, \delta_W(v))$ , wobei  $v$  den gerade gefärbten Knoten bezeichnet. Falls  $\delta_W(v) = 1$  ist, gibt es also nur einen neuen unabhängigen Teilbaum, der als Graph gesehen die gleiche Struktur hat wie der alte unabhängige Teilbaum. Wenn wir dennoch von einem „neuen“ reden, so deshalb, weil  $v$  zusätzlich gefärbt wurde und der Begriff „unabhängiger Teilbaum“ sowohl die Graphenstruktur als auch die zugehörigen Färbungen beinhaltet. Im allgemeinen aber entstehen in einem Zug sehr viele neue unabhängige Teilbäume. Man beachte, dass im Extremfall von isolierten Knoten ( $\delta_W(v) = 0$ ) auch ein unabhängiger Teilbaum existiert.

trägt dafür Sorge, dass nach jedem ihrer Züge jeder unabhängige Teilbaum höchstens 2 gefärbte Knoten enthält. Nach ihrem ersten Zug ist dies sicherlich erfüllt.

Wenn Bob einen Knoten in einem unabhängigen Teilbaum mit höchstens einem gefärbten Knoten färbt, entstehen nur unabhängige Teilbäume mit höchstens zwei gefärbten Knoten. Bob kann einen unabhängigen Teilbaum mit zwei gefärbten Knoten entweder in zwei unabhängige Teilbäume mit zwei gefärbten Knoten und eine gewisse Anzahl unabhängiger Teilbäume mit genau einem gefärbten Knoten (nämlich dem zuletzt gefärbten) zerlegen, oder in einen mit drei gefärbten Knoten sowie einer gewissen Anzahl von unabhängigen Teilbäumen mit genau einem gefärbten Knoten, oder Bob kann aussetzen. Also gibt es nach Bobs Zug höchstens einen unabhängigen Teilbaum mit drei gefärbten Knoten.

Falls auch nach Bobs Zug nur unabhängige Teilbäume mit 0, 1 oder 2 gefärbten Knoten vorliegen und falls einer von ihnen noch einen ungefärbten Knoten enthält (andernfalls ist das Spiel aus und Alice hat gewonnen), so färbt Alice einen Knoten in diesem unabhängigen Teilbaum derart, dass kein unabhängiger Teilbaum mit drei gefärbten Knoten entsteht (bei zwei gefärbten Knoten nimmt sie einen Knoten auf dem kreisfreien Pfad von dem einen zum anderen Knoten). Wie auch Bob in seinen Zügen benötigt Alice hierzu maximal eine dritte Farbe.

Im Fall, dass Bob einen unabhängigen Teilbaum mit drei gefärbten Knoten  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  erzeugt hat, gibt es genau einen ungefärbten Knoten, der auf allen drei kreisfreien Pfaden von  $v_1$  nach  $v_2$ , von  $v_1$  nach  $v_3$  bzw. von  $v_2$  nach  $v_3$  liegt. Diesen färbt Alice mit einer eventuell vierten, von den Farben von  $v_1$ ,  $v_2$  und  $v_3$  verschiedenen Farbe und zerlegt damit den unabhängigen Teilbaum in drei neue mit jeweils zwei gefärbten Knoten sowie mehrere neue mit jeweils einem gefärbten Knoten, d.h. die geforderte Invariante ist wieder hergestellt.

Am Ende des Spiels bestehen daher alle unabhängigen Teilbäume entweder aus genau einem gefärbten Knoten oder aus genau zwei gefärbten Knoten und einer Kante. Somit hat Alice gewonnen, da der Graph vollständig gefärbt wurde.  $\square$

Satz 5

Es existiert ein ungerichteter Wald  $B_0$  mit

$$\chi_{[A,A]}(B_0) \geq 4$$

**Beweis:**

Wir geben einen Baum  $B_0$  an, auf dem Bob eine Gewinnstrategie bei 3 Farben  $\{1, 2, 3\}$  besitzt. (*Beweis ähnlich wie bei Bodlaender [3].*) Es ist sehr leicht



einzusehen, dass Bob auf  $B_0$  ebenfalls eine Gewinnstrategie mit 0, 1 oder 2 Farben besitzt.

$B_0$  ist der in Abbildung 2 dargestellte Baum. Wir unterscheiden zwei Phasen des Spiels: Das Vorspiel und das Endspiel.

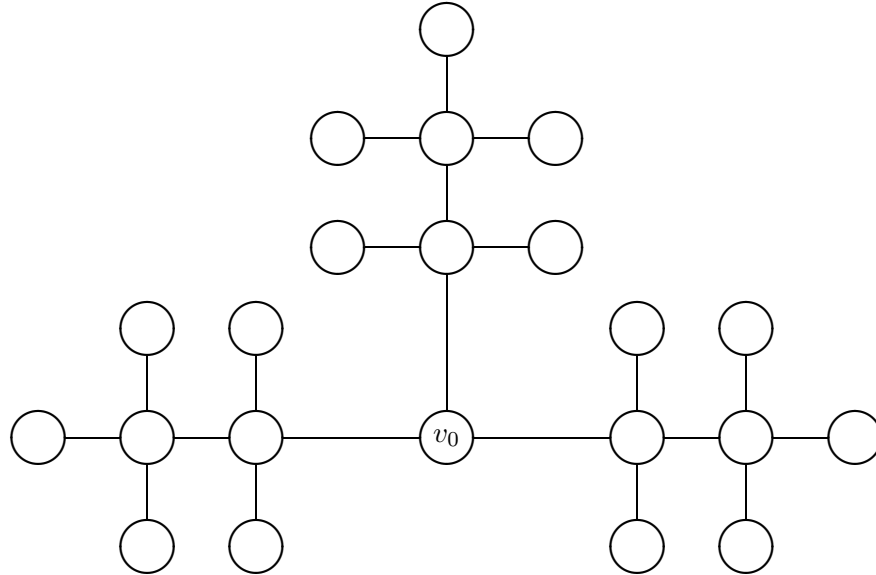


Abbildung 2: Der Baum  $B_0$

**Das Vorspiel:** Möglicherweise setzt Alice im ersten Zug nicht aus. Falls sie den Mittelknoten  $v_0$  färbt, ist das Vorspiel beendet. Falls sie einen Knoten in einem der drei gleichartig aussehenden  $v_0$ -Äste färbt, so betrachten wir diesen  $v_0$ -Ast als „erledigt“. Dann (bzw. falls das Spiel mit Bob erst beginnt, weil Alice ausgesetzt hat) färbt Bob den Mittelknoten und Alice darauf einen Knoten in einem  $v_0$ -Ast, den wir ebenfalls als „erledigt“ ansehen. Damit ist auch in den anderen Fällen das Vorspiel beendet.

**Das Endspiel:** Wir betrachten im weiteren einen  $v_0$ -Ast, der nicht erledigt ist (siehe Abbildung 3). Bob, der am Zug ist, färbt  $v_3$  in der gleichen Farbe wie  $v_0$ . O.B.d.A. seien  $v_0$  und  $v_3$  in der Farbe **1** gefärbt. Dann hat Alice die folgenden vier Möglichkeiten:

- (1) Sie kann einen inneren Knoten von **1** verschieden färben, o.B.d.A. den Knoten  $v_1$  mit Farbe **3**.
- (2) Sie kann einen äußeren Knoten von **1** verschieden färben, o.B.d.A. den Knoten  $x_2$  mit Farbe **3**.
- (3) Sie kann einen äußeren Knoten mit **1** färben, o.B.d.A. den Knoten  $y_1$ .

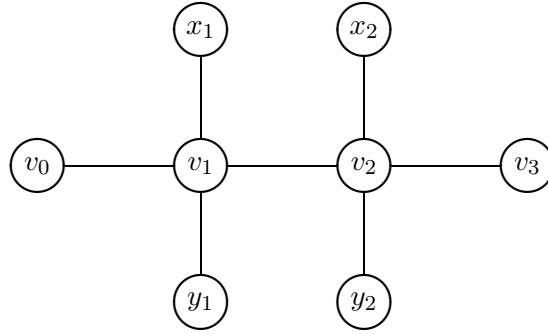


Abbildung 3: Ein  $v_0$ -Ast von  $B_0$

- (4) Sie kann aussetzen oder einen Knoten in einem anderen  $v_0$ -Ast färben.

In allen Fällen antwortet Bob durch Färben von  $y_2$  in der Farbe **2**.

In den ersten beiden Fällen umgeben danach drei paarweise verschieden gefärbte Knoten einen ungefärbten Knoten, der in Folge nicht mehr zulässig gefärbt werden kann, so dass Bob gewinnen wird.

In den Fällen (3) und (4) kann Alice noch einen beliebigen Zug ausführen, spätestens nach Bobs darauffolgendem Zug kann er die gleiche Situation herbeiführen, wie man leicht nachprüft. Also besitzt Bob in allen Fällen eine Gewinnstrategie.  $\square$

Unter Beachtung von Satz 1 aus 3.9 besagen die beiden letzten Sätze zusammenfassend:

**Theorem 6**

Sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller (ungerichteten) Wälder. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \chi_{[A,A]}(\mathcal{W}) &= 4, & \chi_{[A,-]}(\mathcal{W}) &= 4, & \chi_{[A,B]}(\mathcal{W}) &= 4, \\ \chi_{[B,A]}(\mathcal{W}) &= 4, & \chi_{[B,-]}(\mathcal{W}) &= 4, & \chi_{[B,B]}(\mathcal{W}) &= 4. \end{aligned}$$

## 4.2 Das gerichtete Knotenfärbungsspiel auf Wäldern

Beim gerichteten Knotenfärbungsspiel möchten wir ein ähnliches Resultat erzielen. Dazu haben wir zunächst den Begriff von unabhängigen Teilbäumen geeignet zu modifizieren. Wir erinnern uns daran, dass beim Spiel (**GKnot**) ein ungefärbter Knoten  $v$  nicht in der Farbe eines schon gefärbten Nachbarknotens  $w$  gefärbt werden durfte, wenn die Kante auf  $v$  zeigte (d.h. bei Vorliegen einer Kante  $(w, v)$ ). Dagegen durfte  $v$  mit der gleichen Farbe wie sein

Nachbarknoten  $w$  gefärbt werden, wenn die Verbindungskante auf den Nachbarknoten  $w$  zeigte. Die dazu passende Definition ist folgende:

Sei  $W = (V, E)$  ein gerichteter Wald, auf dem **(GKnot)** gespielt wird. Ein *unabhängiger Teilbaum*  $T$  ist ein Teilbaum von  $W$  in einer bestimmten Spielsituation, für dessen sämtliche gefärbte Knoten  $v$  die beiden Eigenschaften

- (1)  $\delta_T^+(v) = 0$  (nicht notwendigerweise  $\delta_W^+(v) = 0$ )
- (2)  $\delta_T^-(v) \leq 1$  (nicht notwendigerweise  $\delta_W^-(v) \leq 1$ )

gelten, und so dass  $T$  maximal mit diesen Eigenschaften ist. Außerdem wollen wir einen Teilbaum, der nur aus einem gefärbten Knoten besteht, ebenfalls als *unabhängigen Teilbaum* bezeichnen.

Zu jeder Zeit des Spiels gehört jeder Knoten zu einem unabhängigen Teilbaum, jedoch nicht mehr jede Kante. Man kann sich einen Zug so vorstellen, dass ein unabhängiger Teilbaum durch Färben eines Knotens  $v$  in mehrere unabhängige Teilbäume zerlegt wird (mit Bruchstelle  $v$ ), wobei in  $v$  eingehende Kanten gelöscht werden (und  $v$  in den entsprechenden unabhängigen Teilbäumen nicht vorkommt), aber aus  $v$  austretende Kanten bestehen bleiben (so dass  $v$  in den entsprechenden unabhängigen Teilbäumen als „Blattanfangspunkt“ vorkommt). Ferner entsteht ein trivialer unabhängiger Teilbaum, der nur aus  $v$  besteht.

Satz 7	Sei $W$ ein gerichteter Wald. Dann gilt: $\vec{\chi}_{[B, B]}(W) \leq 3$
--------	--

**Beweis:**

Die hier vorgestellte Gewinnstrategie von Alice mit 3 Farben erhält die Invariante, dass nach jedem Zug von Alice alle vorkommenden unabhängigen Teilbäume jeweils höchstens einen gefärbten Knoten besitzen. Zu Beginn des Spiels ist dies sicherlich erfüllt.

Nach einem Zug von Bob auf einem unabhängigen Teilbaum mit 0 oder 1 gefärbten Knoten haben alle neuen unabhängigen Teilbäume ebenfalls jeweils höchstens einen gefärbten Knoten, bis auf maximal eine Ausnahme mit zwei gefärbten Knoten.

Wenn nur unabhängige Teilbäume mit höchstens einem gefärbten Knoten nach Bobs Zug vorliegen, dann sucht sich Alice einen aus, der noch einen ungefärbten Knoten enthält (falls kein solcher existiert, ist das Spiel aus und Alice hat gewonnen), und färbt einen seiner Knoten derart, dass kein unabhängiger Teilbaum mit 2 gefärbten Knoten entsteht. Falls der ausgesuchte unabhängige Teilbaum keinen gefärbten Knoten hatte, so ist dies trivialerweise möglich,

falls er einen gefärbten Knoten  $v$  hatte, so hat er auch einen ungefärbten Knoten  $w$  und ein nach innen gerichtetes Blatt  $(v, w)$ , und die Färbung von  $w$  zerlegt ihn in mehrere unabhängige Teilbäume mit höchstens einem gefärbten Knoten, darunter einen, der nur aus dem Knoten  $v$  besteht.

Falls ein unabhängiger Teilbaum mit 2 gefärbten Knoten  $v$  und  $w$  nach Bobs Zug auftritt, so betrachtet Alice den kreisfreien Pfad  $ve_1u_1e_2u_2\dots e_nw$  von  $v$  nach  $w$ . Da  $e_1$  und  $e_n$  nach innen gerichtete Blätter (des unabhängigen Teilbaums) sind, ist  $n \geq 2$  und es gibt einen Knoten  $u_i$ , auf den sowohl  $e_i$  als auch  $e_{i+1}$  zeigen. Diesen Knoten  $u_i$  färbt Alice mit einer dritten (von den Farben von  $v$  und  $w$  verschiedenen) Farbe und zerspaltet den unabhängigen Teilbaum in viele Stücke. Die Knoten  $v$  und  $w$  liegen in verschiedenen Stücken, zu denen jeweils  $u_i$  nicht mehr gehört, somit haben alle entstehenden neuen unabhängigen Teilbäume höchstens einen gefärbten Knoten.

Induktiv folgt, dass am Ende des Spiels alle unabhängigen Teilbäume genau aus einem gefärbten Knoten bestehen. Somit gewinnt Alice mit dieser Strategie.  $\square$

Satz 8

Es gibt einen gerichteten Wald  $B_1$  mit

$$\vec{\chi}_{[A,A]}(B_1) \geq 3.$$

**Beweis:**

$B_1$  ist der in Abbildung 4 dargestellte gerichtete Baum. Es sind Gewinnstrategien für Bob mit 0, 1 oder 2 Farben anzugeben. Bei 0 bzw. 1 Farben muss bzw. kann Bob offensichtlich gewinnen. Sei nun die Farbmenge zweielementig. Der Beweis läuft ähnlich wie in Satz 5.

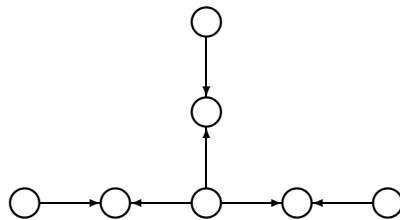


Abbildung 4: Der gerichtete Baum  $B_1$

Im Vorspiel stellt Bob so schnell wie möglich sicher, dass der Mittelknoten  $v_0$  gefärbt wird. Im Endspiel sucht er sich einen  $v_0$ -Ast aus, dessen Knoten bis auf  $v_0$  ungefärbt sind, und färbt den Anfangsknoten  $w$  des Blattes von  $v_0$  verschieden. Der Knoten zwischen  $v_0$  und  $w$  kann dann nicht mehr zulässig gefärbt werden, so dass Bob gewinnt.  $\square$

Unter Beachtung von Satz 1 aus 3.9 besagen die beiden letzten Sätze zusammenfassend:

Theorem 9	<p>Sei <math>\mathcal{W}</math> die Klasse aller gerichteten Wälder. Dann gilt:</p> $\begin{aligned} \vec{\chi}_{[A,A]}(\mathcal{W}) &= 3, & \vec{\chi}_{[A,-]}(\mathcal{W}) &= 3, & \vec{\chi}_{[A,B]}(\mathcal{W}) &= 3, \\ \vec{\chi}_{[B,A]}(\mathcal{W}) &= 3, & \vec{\chi}_{[B,-]}(\mathcal{W}) &= 3, & \vec{\chi}_{[B,B]}(\mathcal{W}) &= 3. \end{aligned}$
-----------	--

### 4.3 Das ungerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel auf Wäldern

Satz 10	<p>(Chen, Schelp, Shreve) [5] Sei <math>W</math> ein ungerichteter Wald. Dann gilt:</p> $\chi_{[B,B]}^*(W) \leq 3$
---------	--

**Beweis:**

Sei die Farbmenge  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}\}$  vorgegeben. Im folgenden wird eine Gewinnstrategie von Alice bezüglich dieser Farbmenge angegeben, bei der im ersten Teil des Spieles die Farbe  $\mathbf{3}$  nicht benutzt wird, und im zweiten Teil des Spieles nur noch mit Farbe  $\mathbf{3}$  gefärbt wird. Die Definition unabhängiger Teilbäume ist genau wie beim Spiel (**UKnot**).

**Das Hauptspiel:** Während dieser ersten Phase des Spiels erhält Alice die Invariante, dass nach jedem ihrer Züge alle vorkommenden unabhängigen Teilbäume von den folgenden beiden Typen sind:

- $N$ : Der unabhängige Teilbaum hat höchstens 2 gefärbte Knoten. Diese sind mit Farben aus  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$  gefärbt.
- $O$ : Der unabhängige Teilbaum hat einen ungefärbten Knoten, zu dem alle seine gefärbten Knoten benachbart sind. Diese sind mit Farben aus der Menge  $\{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$  gefärbt.

Typ  $N$  und  $O$  haben einen nichtleeren Schnitt.

Wenn vor dem Zug von Alice nur solche Typen vorliegen und noch ein Knoten in einer der Farben  $\mathbf{1}$  oder  $\mathbf{2}$  gefärbt werden kann, so kann Alice auf einfache Weise sicherstellen, dass nach ihrem Zug die Invariante bestehen bleibt: Gibt es einen Typen  $N$  mit 0 oder 1 gefärbten Knoten und einem ungefärbten Knoten  $v$ , so färbt Alice  $v$ . Gibt es einen Typen  $N$  mit 2 gefärbten

Knoten  $v_1$  und  $v_2$ , so dass der Pfad  $v_1 e_1 w_1 e_2 w_2 \dots e_n v_2$  von  $v_1$  nach  $v_2$  mindestens Länge  $n = 3$  hat, so sind  $w_1$  und  $v_2$  nicht benachbart und Alice kann  $w_1$  färben. Existiert ein Typ  $O$  mit ausgezeichnetem ungefärbten Knoten  $v_0$ , zu dem alle gefärbten Knoten benachbart sind, in dem es noch einen weiteren ungefärbten Knoten gibt, also o.B.d.A. einen solchen  $w$ , der zu  $v_0$  benachbart ist, so darf Alice  $w$  färben. Falls ein Typ  $O$  existiert, der genau einen ungefärbten Knoten enthält, und dessen andere Knoten in ein und derselben Farbe gefärbt sind, so darf Alice dessen ungefärbten Knoten in der zweiten Farbe färben.

Falls Bob einen Zug auf Typ  $N$  ausführt, so sind entweder nach seinem Zug alle vorkommenden unabhängigen Teilbäume von den Typen  $N$  oder  $O$ , oder es gibt genau einen unabhängigen Teilbaum mit 3 gefärbten Knoten  $x_0$ ,  $y_0$  und  $z_0$ . Sei  $v_0$  der Schnittpunkt der drei kreisfreien Pfade zwischen diesen Knoten. Seien  $l_x$ ,  $l_y$  bzw.  $l_z$  die Längen der Pfade von  $x_0$  nach  $v_0$ , von  $y_0$  nach  $v_0$  bzw. von  $z_0$  nach  $v_0$ . Wenn mindestens zwei dieser Längen  $\geq 2$  sind, so färbt Alice  $v_0$  und zerlegt den unabhängigen Teilbaum in mehrere Typen  $N$ . Wenn genau eine dieser Längen  $\geq 2$  ist, o.B.d.A.  $l_x$ , so färbt Alice den zu  $v_0$  benachbarten Knoten auf dem kreisfreien Pfad von  $x_0$  nach  $v_0$  und erhält einen Typen  $O$  und mehrere Typen  $N$ . (Falls alle Längen  $= 1$  sind, so liegt schon Typ  $O$  vor.)

Falls Bob einen Zug auf Typ  $O$  ausführt, so sind entweder nach seinem Zug alle vorkommenden unabhängigen Teilbäume von den Typen  $N$  oder  $O$ , oder es gibt genau eine Ausnahme, nämlich einen unabhängigen Teilbaum mit einem ungefärbten Knoten  $v_0$ , zu dem alle gefärbten Knoten des unabhängigen Teilbaums benachbart sind, bis auf einen Knoten  $v$ . Falls die zu  $v_0$  benachbarten gefärbten Knoten alle in der gleichen Farbe gefärbt sind, färbt Alice  $v_0$  und erhält mehrere Typen  $N$ , ansonsten färbt Alice den zu  $v_0$  benachbarten Knoten auf dem kreisfreien Pfad von  $v$  nach  $v_0$  und erhält wieder einen Typen  $O$  sowie mehrere Typen  $N$ .

In allen Fällen ist der Knoten, den Alice färbt, höchstens zu einem gefärbten Knoten benachbart, somit kommt Alice mit zwei Farben aus, solange das Hauptspiel andauert. Bob darf währenddessen ebenfalls nur diese zwei Farben **1** und **2** benutzen.

Am Ende des Hauptspiels liegen somit nur noch solche Typen  $N$  und  $O$  vor, in denen kein ungefärbter Knoten mehr mit **1** oder **2** gefärbt werden darf. Für Typ  $N$  (soweit nicht in Typ  $O$  enthalten) heißt dies, dass er entweder nur aus einem isolierten gefärbten Knoten besteht oder aus genau zwei gefärbten Knoten mit einer Kante dazwischen. Ein Typ  $O$  besteht dann aus einem ungefärbten Knoten und dessen sämtlichen Nachbarn (in  $W$ !), die allesamt gefärbt sind, sowie den dazwischen liegenden Kanten. Somit sind alle ungefärbten Knoten zu diesem Zeitpunkt isoliert, d.h. genauer, durch gefärbte Knoten

voneinander getrennt (andernfalls müssten zwei ungefärbte im gleichen unabhängigen Teilbaum vorkommen).

**Das Endspiel:** Hier werden einfach alle isolierten ungefärbten Knoten von Bob und Alice zwangsläufig mit Farbe **3** gefärbt. Somit gewinnt Alice mit drei Farben.  $\square$

Der Beweis des vorstehenden Satzes wurde in [5] auf eine andere, globalere Art durchgeführt. Der Nachteil dabei lag darin, dass die dort vorgestellte (ebenfalls konstruktive) Gewinnstrategie mit einem umständlichen Widerspruchsbeweis auf ihre Gültigkeit überprüft werden musste. Der Vorteil unseres Beweises, der auf dem Begriff von unabhängigen Teilbäumen beruht, besteht darin, dass sich die Analyse einer Spielsituation auf die lokale Zerlegbarkeit, d.h. die Zerlegbarkeit jeweils eines einzigen unabhängigen Teilbaums reduziert. Dabei behandelt man jeweils nur einen bestimmten Typen unabhängiger Teilbäume, und nicht die ganze Fülle aller Möglichkeiten auf einmal, was unseren Beweis wesentlich durchsichtiger macht.

Ein ähnlicher wie der folgende Satz ist in [5] ein einfaches Korollar aus einem Struktursatz über bipartite Graphen. Allerdings wurde dort nur das Spiel **(NeuUKnot)** $[A, -]$  betrachtet. Das unten vorgestellte Beispiel dagegen funktioniert sogar für das Spiel **(Neu UKnot)** $[A, A]$ , bei dem es Alice erlaubt ist, auszusetzen.

Satz 11	Es existiert ein ungerichteter Wald $P_6$ mit
	$\chi_{[A,A]}^*(P_6) \geq 3.$

**Beweis:**

$P_6$  ist der Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5e_6v_6$  der Länge 6. Es ist zu zeigen, dass Bob eine Gewinnstrategie mit 2 Farben **1** und **2** hat. (Gewinnstrategien mit 0 bzw. 1 Farben sind offensichtlich.)

Falls Alice im ersten Zug aussetzt, färbt Bob  $v_3$  mit **1**. Wenn Alice danach  $v_0$ ,  $v_1$  oder  $v_2$  färbt oder aussetzt, antwortet Bob sofort durch Färben von  $v_6$  mit **1**, ansonsten färbt Bob  $v_0$  mit **1**.

Falls Alice im ersten Zug nicht aussetzt und  $v_i$  färbt, so färbt Bob  $v_{i+3}$  oder  $v_{i-3}$  (je nachdem, welches der beiden existiert) in der gleichen Farbe.

In allen Fällen muss nun Bob gewinnen.  $\square$

Unter Beachtung von Satz 1 aus 3.9 besagen die beiden letzten Sätze zusammenfassend:

**Theorem 12**

Sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller ungerichteten Wälder. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} \chi_{[A,A]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \chi_{[A,-]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \chi_{[A,B]}^*(\mathcal{W}) = 3 \\ \chi_{[B,A]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \chi_{[B,-]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \chi_{[B,B]}^*(\mathcal{W}) = 3 \end{array}$$

## 4.4 Das gerichtete „neue“ Knotenfärbungsspiel auf Wäldern

Beim Übergang vom ungerichteten zum gerichteten Knotenfärbungsspiel hatten wir eine Farbe sparen können, ebenfalls beim Übergang vom ungerichteten zum ungerichteten „neuen“ Knotenfärbungsspiel. Da liegt die Vermutung nahe, dass wir beim Übergang vom ungerichteten „neuen“ (bzw. bei anderer Betrachtungsweise vom gerichteten) zum gerichteten „neuen“ Knotenfärbungsspiel noch eine weitere Farbe einsparen können. Die Tatsache, dass für einen gerichteten Wald  $W$ , der mindestens eine Kante enthält, beim Übergang von der chromatischen Zahl  $\chi(W) = 2$  zur gerichteten chromatischen Zahl  $\vec{\chi}(W) = 1$  auch eine Verminderung um den Wert 1 erfahren wird, ist ein weiteres Indiz für diese Vermutung.

Doch manchmal hat die Mathematik noch Überraschungen zu bieten. In ähnlichen Strukturen offenbaren sich dennoch Unterschiede. Und so werden wir in diesem Abschnitt sehen, dass die obige Vermutung falsch ist.

**Satz 13**

Sei  $W$  ein gerichteter Wald. Dann gilt:

$$\vec{\chi}_{[B,B]}^*(W) \leq 3$$

**Beweis:**

Bisher ist es eine offene Frage, ob  $\vec{\chi}_{[B,B]}^*(G) \leq \chi_{[B,B]}^*(G)$  für einen beliebigen Graphen  $G$  gilt. Falls ja, so wäre dieser Satz nur eine triviale Folgerung von Satz 10. Doch schon im nächsten Kapitel werden wir sehen, dass eine ähnliche Abschätzung für einfache (d.h. nicht „neue“) spielchromatische Zahlen im allgemeinen falsch ist.

Der Beweis läuft aber für den Wald  $W$  ganz analog zum Beweis von Satz 10, wenn man nur den geänderten Begriff von unabhängigen Teilbäumen in gerichteten Spielen zu Grunde legt. Alice benutzt genau die gleiche Gewinnstrategie. Dabei beachte man, dass, wenn in Typ  $N$  bzw. Typ  $O$  ein gefärbter Knoten fehlt, wieder Typ  $N$  bzw. Typ  $O$  vorliegt. Somit wird die Invariante im Hauptspiel erhalten bleiben. Dies beweist alles.  $\square$



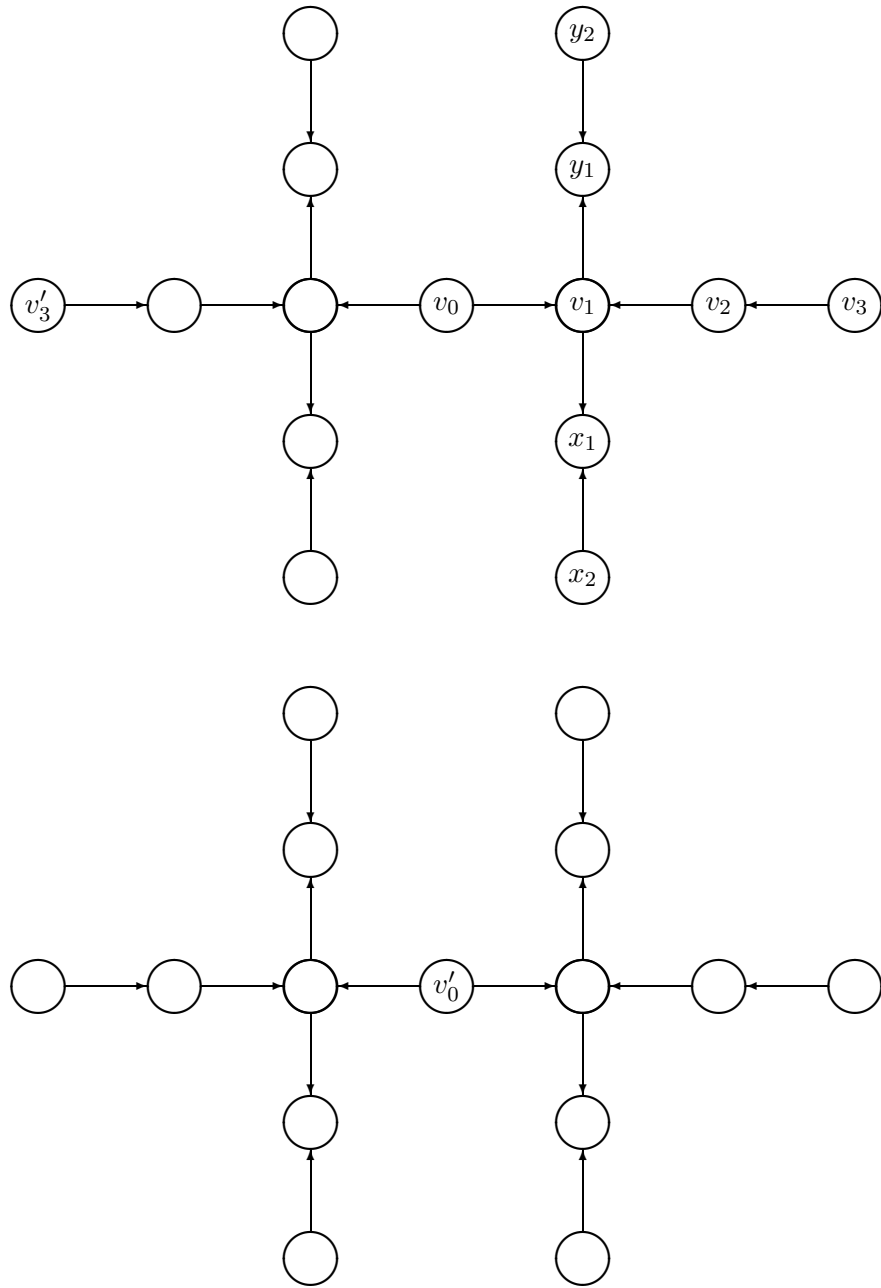


Abbildung 5: Der gerichtete Wald  $W_2$

Satz 14

Es gibt einen gerichteten Wald  $W_2$  mit

$$\vec{\chi}_{[A,A]}^*(W_2) \geq 3.$$

**Beweis:**

$W_2$  ist der in Abbildung 5 dargestellte gerichtete Wald. Beim Spiel (**NeuG-Knot**) mit 0 oder 1 Farben kann Bob offensichtlich gewinnen. Werde nun das Spiel mit 2 Farben auf  $W_2$  gespielt.

**Das Vorspiel:** Alice setzt aus oder färbt o.B.d.A. einen Knoten in dem Baum, zu dem  $v'_0$  gehört. Bob färbt dann  $v_0$  mit der ersten Farbe **1**. Alice setzt aus oder färbt einen Knoten in dem Baum, zu dem  $v_0$  gehört, oder o.B.d.A. in dem  $v_0$ -Ast, zu dem  $v'_3$  gehört. Falls sie hierbei die zweite Farbe benutzt hat, so färbt Bob  $v_2$  und wird gewinnen. Betrachten wir im weiteren den Fall, dass bislang nur eine Farbe benutzt wurde. Dann färbt Bob  $v_3$  mit dieser Farbe **1**.

**Das Hauptspiel:** Egal, was Alice im nächsten Zug macht, sind danach entweder  $x_1$  und  $x_2$  oder  $y_1$  und  $y_2$  ungefärbt, o.B.d.A.  $x_1$  und  $x_2$ . Bob färbt dann  $x_2$  mit **1**.

**Das Mittelspiel:** Dies geht weiter, solange Alice und Bob nur Farbe **1** gebrauchen. (Möglicherweise hat Alice bereits im Hauptspiel eine zweite Farbe benutzt, dann besteht das Mittelspiel aus 0 Zügen.) Wichtig ist, dass  $v_1$ ,  $v_2$  und  $x_1$  niemals mit Farbe **1** gefärbt werden.

**Das Endspiel:** Wenn Alice  $v_1$  oder  $v_2$  schon im Hauptspiel mit der zweiten Farbe gefärbt hat, muss Bob gewinnen, wenn sie es nun tut, ebenfalls. Falls sie stattdessen nun  $x_1$  oder irgendeinen anderen Knoten mit der zweiten Farbe färbt oder falls Bob am Zug gezwungen zur Benutzung der zweiten Farbe ist, färbt Bob  $v_2$  mit der zweiten Farbe und muss nun gewinnen (beachte:  $v_1$  ist dann noch ungefärbt!).  $\square$

Unter Beachtung von Satz 1 aus 3.9 besagen die beiden letzten Sätze zusammenfassend:

Theorem 15

Sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller gerichteten Wälder. Dann gilt:

$$\begin{array}{lll} \vec{\chi}_{[A,A]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \vec{\chi}_{[A,-]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \vec{\chi}_{[A,B]}^*(\mathcal{W}) = 3 \\ \vec{\chi}_{[B,A]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \vec{\chi}_{[B,-]}^*(\mathcal{W}) = 3 & \vec{\chi}_{[B,B]}^*(\mathcal{W}) = 3 \end{array}$$

## 4.5 Andere Knotenfärbungsspiele auf Wäldern

Da Wälder in vieler Beziehung die einfachste Graphenklasse darstellen, wurden, wann immer sich jemand neue Graphenfärbungsspiele ausgedacht hatte, diese Spiele zunächst an Wäldern ausprobiert. Deshalb gibt es neben den bereits erwähnten Resultaten noch ein weiteres, das hier ohne Beweis zitiert wird:

### 4.5.1 Das relaxierte Spiel

Hierbei sei  $k \in \mathbb{N}_0$ . Beim  $k$ -relaxierten Spiel  $k$ -(**UKnot**) dürfen bis zu  $k$  Nachbarknoten eines gefärbten Knotens  $v$  in der gleichen Farbe wie  $v$  gefärbt sein, unabhängig davon, ob zuerst  $v$  oder eine gewisse Anzahl von Nachbarknoten gefärbt wurde. Ansonsten sind die Regeln wie bei (**UKnot**). Das Spiel 0-(**UKnot**) ist also genau das Spiel (**UKnot**).

Satz 16

(Chou, Wang, Zhu) [6]

Sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller ungerichteten Wälder und sei  $k \geq 1$ . Dann gilt:

$$Z_{k-(\mathbf{UKnot})[A,-]}(\mathcal{W}) \leq 3$$

### 4.5.2 Andere relaxierte Spiele

Genau wie (**UKnot**) kann man auch alle anderen bisher behandelten Spiele in einer relaxierten Variante betrachten.<sup>8</sup> Dies betrifft sowohl das gerichtete als auch die beiden „neuen“ Spiele. Hierzu gibt es noch keine Ergebnisse.

---

<sup>8</sup>Bei den beiden gerichteten Spielen könnte man die Relaxierung etwa wie folgt definieren: Ein Knoten  $v$  darf mit Farbe  $i$  gefärbt werden, wenn maximal  $k$  der Nachbarn  $w$ , für die es eine Kante  $(w, v)$  gibt, zu dem Zeitpunkt schon mit  $i$  gefärbt sind.

## 5 Knotenfärbungsspiele auf Torusgittergraphen

### 5.1 Torusgittergraphen

Bezeichne  $\mathbb{Z}_n$  die zyklische Gruppe mit  $n$  Elementen für jedes  $n \in \mathbb{N}$ . Sei weiterhin  $k \in \mathbb{N}$ . Unter einem *k-dimensionalen Torusgittergraphen* verstehen wir einen ungerichteten Graphen  $G = (V, E)$ , dessen Knotenmenge sich schreiben lässt als

$$V = \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k},$$

wobei  $n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ , und für dessen Kantenmenge gilt:

Ein Element  $((a_1, a_2, \dots, a_k), (b_1, b_2, \dots, b_k)) \in V \times V$  ist genau dann in  $E$ , wenn es ein  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  gibt, so dass

- (1)  $\forall j \neq i : a_j = b_j$
- (2)  $b_i \in \{a_i - 1, a_i + 1\} \setminus \{a_i\}$

Wir bezeichnen den so definierten *k-dimensionalen Torusgittergraphen*<sup>9</sup> auch als  $TG_{n_1, n_2, \dots, n_k}$ . Man kann sich seine Knotenmenge  $V$  vorstellen als Schnitt des *k-dimensionalen Gitters*  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$  mit dem Quader

$$[1, n_1] \times [1, n_2] \times \cdots \times [1, n_k]$$

und seine Kantenmenge  $E$  als Verbindungen der direkten Nachbarn, d.h. der Gitterpunkte mit dem Abstand 1, wobei zusätzlich noch die jeweils gegenüberliegenden Enden (außer wenn dadurch Schleifen entstehen würden) durch Kanten verbunden sind. Durch diese Konstruktion wird erreicht, dass alle Knoten in  $V$  den gleichen Knotengrad

$$\Delta = \sum_{i=1}^k \min(n_i - 1, 2)$$

besitzen. Der Name Torusgittergraph kommt von dem zweidimensionalen Fall her, da  $G_{n_1, n_2}$  im allgemeinen zwar nicht mehr planar ist, sich jedoch auf der Oberfläche eines Torus einbetten lässt.

Für die chromatische Zahl  $\chi = \chi(TG_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  gilt:  $\chi \in \{1, 2, 3\}$ , wie man sich leicht überlegt. Für die spielchromatische Zahl  $\chi_g = \chi_{[X, Y]}(TG_{n_1, n_2, \dots, n_k})$  gilt wie immer die triviale Abschätzung

$$\chi \leq \chi_g \leq \Delta + 1.$$

---

<sup>9</sup>Unter Addition und Subtraktion verstehen wir in diesem ganzen Abschnitt 5 immer die entsprechenden Verknüpfungen in dem jeweiligen  $\mathbb{Z}_{n_j}$ , mit Ausnahme der Fälle, in denen offensichtlich in  $\mathbb{Z}$  gerechnet werden muss.

Den oberen Teil der Abschätzung kann man im Fall ( $n_1 = 2$ , Bob fängt an) noch leicht wie folgt verschärfen:

Lemma 17	<p>Seien <math>k, n_2, n_3, \dots, n_k \in \mathbb{N}</math>, <math>k \geq 2</math> und <math>n_k \geq 2</math>. Dann gilt:</p> $\chi_{[B, -]}(TG_{2, n_2, \dots, n_k}) \leq \Delta(TG_{2, n_2, \dots, n_k}).$
----------	--

**Beweis:**

Es sei  $\mathbb{Z}_\Delta = \{1, 2, \dots, \Delta\}$  die Menge der Farben. Die Addition und Subtraktion von Farben erfolge in  $\mathbb{Z}_\Delta$ . Man beachte, dass  $\Delta \geq 2$  wegen  $n_k \geq 2$ . Sei  $f$  die partielle Färbung im Verlauf des Spiels. Dann hat Alice folgende Gewinnstrategie:

Wenn Bob den Knoten  $(0, n_2, \dots, n_k)$  mit der Farbe  $m \in \mathbb{Z}_\Delta$  färbt, so antwortet Alice damit, dass sie den Knoten  $(1, n_2, \dots, n_k)$  mit Farbe  $m + 1$  färbt.

Wenn Bob den Knoten  $(1, n_2, \dots, n_k)$  mit der Farbe  $m \in \mathbb{Z}_\Delta$  färbt, so antwortet Alice damit, dass sie den Knoten  $(0, n_2, \dots, n_k)$  mit der Farbe  $m - 1$  färbt.

So gilt stets nach dem Zug von Alice, dass entweder  $(0, n_2, \dots, n_k)$  und  $(1, n_2, \dots, n_k)$  beide ungefärbt oder beide gefärbt sind, wobei im letzteren Fall

$$f((1, n_2, \dots, n_k)) = f((0, n_2, \dots, n_k)) + 1 \quad (8)$$

ist. Wegen  $\Delta \geq 2$  gilt  $m - 1 \neq m \neq m + 1$ . Ferner kann Bob natürlich, solange noch ungefärbte Knoten vorhanden sind, immer seinen Zug durchführen und irgendwo einen Knoten zulässig färben, da jeder in Frage kommende Knoten höchstens  $\Delta - 1$  gefärbte Nachbarn hat. Zum Beispiel komme die Farbe  $m$  nicht unter den Farben der Nachbarn vor und Bob färbe mit  $m$ . Dann kommt wegen der Invariante (8) — je nachdem, in welchem Fall wir uns befinden — entweder die Farbe  $m - 1$  oder  $m + 1$  nicht unter den Nachbarn des Knoten vor, den Alice im Anschluss gemäß ihrer Gewinnstrategie färbt, so dass auch Alice immer ziehen kann. □

## 5.2 Die spielchromatische Zahl von bestimmten $TG_{m,n}$

Wir betrachten ab jetzt nur noch zweidimensionale Torusgittergraphen  $TG_{m,n}$  ( $m, n \in \mathbb{N}$ ). Für einige kleinere Vertreter verifiziert man sofort die spielchromatischen Zahlen:

$$\chi_{[A,A]}(TG_{m,n}), \chi_{[B,A]}(TG_{m,n})$$

$n \quad m$	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
1	1	2	3	2	3	2	3
2	2	2	3	2	3	3	3
3	3	3	3	?	?	?	?

$$\chi_{[B,-]}(TG_{m,n})$$

$n \quad m$	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
1	1	2	3	2	3	2	3
2	2	2	3	2	3	3	3
3	3	3	4	?	?	?	?

$$\chi_{[A,-]}(TG_{m,n})$$

$n \quad m$	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
1	1	2	3	3	3	3	3
2	2	3	4	4	?	?	?
3	3	4	3	?	?	?	?

$$\chi_{[A,B]}(TG_{m,n}), \chi_{[B,B]}(TG_{m,n})$$

$n \quad m$	1	2	3	4	5	6	$\geq 7$
1	1	2	3	3	3	3	3
2	2	3	4	4	?	?	?
3	3	4	4	?	?	?	?

Satz 18

Seien  $m, n \in \mathbb{N}$  mit  $m \geq 3$  und  $n \geq 4$ . Dann gilt:

$$\chi_{[A,-]}(TG_{m,n}) \geq 4, \chi_{[A,B]}(TG_{m,n}) \geq 4, \chi_{[B,B]}(TG_{m,n}) \geq 4.$$

**Beweis:**

Gewinnstrategien von Bob mit 0, 1 oder 2 Farben sind offensichtlich. Eine Gewinnstrategie für Bob mit 3 Farben ist ebenfalls sehr einfach: Bob überlässt Alice den ersten Zug. Alice färbt o.B.d.A. den Knoten  $(0,0)$  mit Farbe **1**. Dann färbt Bob den Knoten  $(1,1)$  mit Farbe **2**. Bob beabsichtigt, in seinem nächsten Zug einen der vier ungefärbten Nachbarknoten der beiden Knoten  $(0,1)$  und  $(1,0)$  mit Farbe **3** zu färben. Damit hat er gewonnen. Alice könnte dies nur verhindern, wenn sie einen Knoten färbte, der benachbart zu (oder identisch mit) allen dieser vier erwähnten ungefärbten Knoten ist; dann wäre aber  $m = n = 3$  im Gegensatz zur Voraussetzung des Satzes.  $\square$

Wir beenden unseren kleinen Exkurs über die Bestimmung von spielchromatischen Zahlen von Torusgittergraphen mit einer Verschärfung des letzten Satzes in einem Spezialfall.

Satz 19

Seien  $k, l \in \mathbb{N}$ ,  $m = 4k, n = 4l$  und  $m, n \geq 8$ . Dann gilt:

$$\chi_{[A,-]}(TG_{m,n}) = 5, \chi_{[A,B]}(TG_{m,n}) = 5, \chi_{[B,B]}(TG_{m,n}) = 5.$$

**Beweis:**

Eine Gewinnstrategie für Bob mit 4 Farben  $\{1, 2, 3, 4\}$  wird wie folgt beschrieben:

Bob überlässt Alice den ersten Zug, die daraufhin einen Knoten  $v_1$  mit der ersten Farbe färben muss. Bob färbt dann einen Knoten  $v_2$ , der Nachbar von genau zwei Nachbarn von  $v_1$  ist, mit einer zweiten Farbe. Danach färbt Alice einen beliebigen ungefärbten Knoten mit einer beliebigen zulässigen Farbe. Wir können aber o.B.d.A. annehmen, dass nun  $(0, 0)$  mit 1 und  $(1, 1)$  mit 2 sowie als dritter Knoten einer der umkreisten Knoten mit Bezeichnung  $A$  bis  $I$  aus der Abbildung 6 mit einer der in der kommenden Fallunterscheidung genannten Farben gefärbt ist. (Die Fälle von nicht umkreisten Knoten mit eventuell einer anderen Farbe können vollkommen analog zu denen von umkreisten Knoten abgehandelt werden, die mit dem gleichen Buchstaben gekennzeichnet sind.)

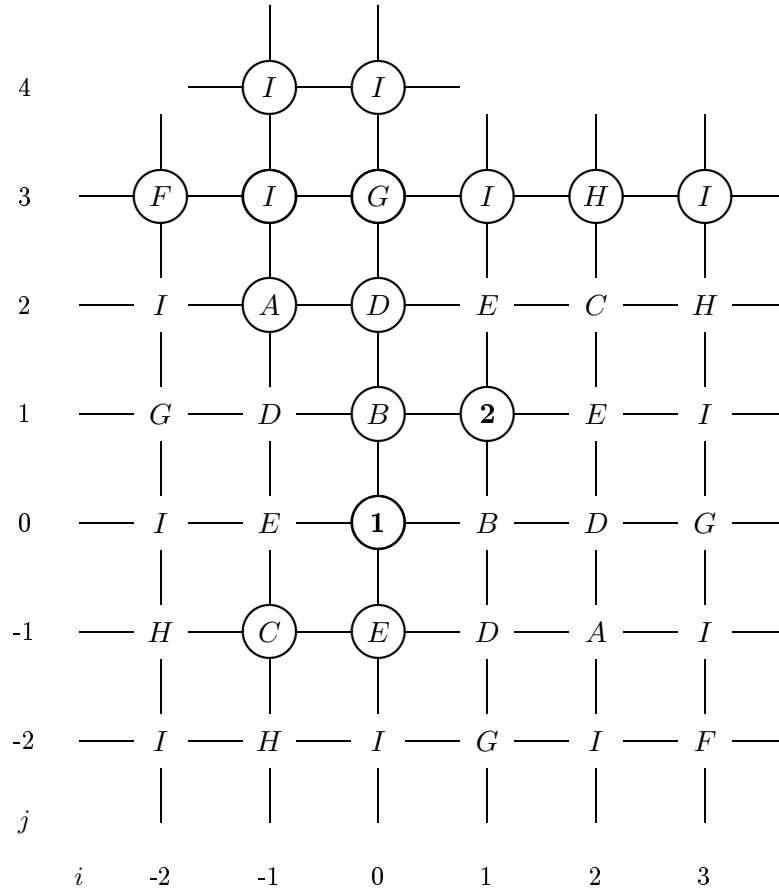


Abbildung 6: Möglichkeiten für den Spielstand nach dem zweiten Zug von Alice: Gefärbt wurden bislang die mit Farbe 1 bzw. 2 gekennzeichneten Knoten, sowie einer der umkreisten Knoten, in denen ein Buchstabe steht. Nicht umkreiste, nur durch Buchstaben bezeichnete Knoten stellen dazu symmetrische Möglichkeiten dar.

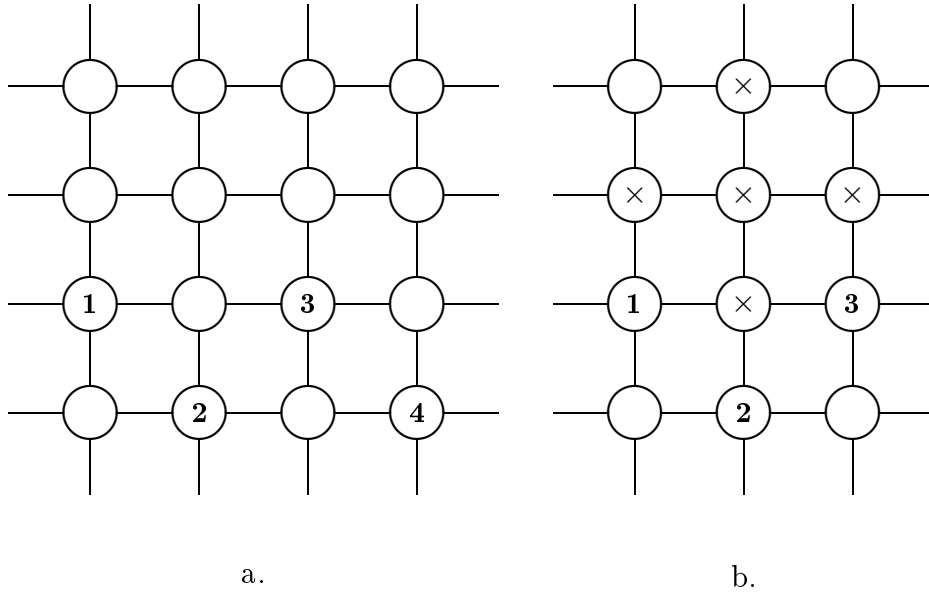


Abbildung 7: (a) Dreiertaschen: Die mit **1**, **2** und **3** gefärbten Knoten bilden eine Dreiertasche nach oben, die mit **2**, **3** und **4** gefärbten eine Dreiertasche nach unten. (b) Verhinderung eines sofortigen Gewinns von Bob nach Erzeugung einer Dreiertasche ist nur möglich, wenn einer der mit  $\times$  bezeichneten Knoten gefärbt ist/wird.

Die Vorgehensweise von Bob besteht nun darin, der Reihe nach die Knoten

$$(i, i \bmod 2) \text{ mit Farbe } f_i \text{ für } i = 2, 3, \dots, m-1$$

zu färben, wobei die  $f_i$  aus einer je nach Fall  $A$  bis  $I$  verschiedenen Farbfolge sind. Wir definieren  $f_0 := 1$  und  $f_1 := 2$ , was den Färbungen der schon gefärbten Knoten  $(0,0)$  und  $(1,1)$  entspricht. Dabei sollen zunächst einmal je drei aufeinander folgende  $f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$  paarweise verschieden sein, so dass immer eine sogenannte „Dreiertasche“ (vgl. Abbildung 7 a.) entsteht. Sobald eine solche entsteht, eröffnet sich Bob die Möglichkeit, im nächsten Zug den Knoten  $(i+1, 2 - 3 \cdot [i+1 \bmod 2])$  mit der vierten, von  $f_i, f_{i+1}, f_{i+2}$  verschiedenen Farbe zu färben, es sei denn, Alice verhindert dies im Zug davor. Um dies zu verhindern, muss einer der fünf in Abbildung 7 b. mit  $\times$  bezeichneten Knoten in der vierten Farbe (der mittlere Knoten in einer anderen Farbe) gefärbt werden. Nun könnte es passieren, dass Alice einen solchen Knoten schon derart in einem früheren Zug gefärbt hat, so dass sie nun nicht mehr unter Zugzwang steht. Um dies auszuschließen, stellen wir eine zweite Forderung an die Farbfolge, nämlich, dass  $\{f_{i-2}, f_{i-1}, f_i\} \neq \{f_i, f_{i+1}, f_{i+2}\}$  für alle  $i \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$  gilt. Der zweite Zug von Alice, der uns die vielen



Fallunterscheidungen beschert, hat auch keinen solchen Knoten gefärbt, dafür haben wir einerseits mit dem „o.B.d.A.“ gesorgt, was nichts anderes als eine Drehung oder Spiegelung des Koordinatensystems und eine Permutation der Farben bewirkt hat (Vertauschung der Koordinatenachsen ist möglich, da  $m$  bzw.  $n$  den gleichen Voraussetzungen unterliegen), außerdem sorgen wir dafür mit der speziellen Wahl der Farbfolge in den einzelnen Fällen.

Somit steht Alice in jedem folgenden Zug von Bob unter Zugzwang. Sie kann Bob also gewinnen lassen, oder so lange weiter spielen, bis sich der Kreis schließt, d.h. alle Knoten  $(i, (i \bmod 2))$  für  $i = 0, 1, 2, \dots, m-1$  gefärbt sind. Wenn Bob aber den letzten Knoten  $(-1, 1)$  gemäß der Farbfolge färbt, öffnen sich in der Regel drei Dreiertaschen zur gleichen Zeit, höchstens eine ist durch Alices zweiten Zug zerstört, höchstens bei einer kann Alice im nächsten Zug Schlimmeres verhindern, wie wir in den einzelnen Fällen sehen werden. Somit kann Bob aus der dritten Dreiertasche eine Konfiguration machen, in der ein ungefärbter Knoten von vier paarweise verschieden gefärbten Knoten umgeben ist und gewinnt.

Wir müssen nun einsehen, dass in jedem der möglichen Fälle von Alices zweitem Zug eine Farbfolge mit den beiden erwähnten Eigenschaften existiert, und dass beim Schließen des Kreises jeweils eine Dreiertasche übrigbleibt. Dies ist bei Angabe einer solchen Farbfolge unmittelbar überprüfbar.

In den meisten Fällen tut es die einfachste solche Farbfolge  $(1\,2\,3\,4)^k$ , die diese Eigenschaften sicherlich besitzt. Hierbei sei

$$(1\,2\,3\,4)^k := \underbrace{(1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4, \dots, 1, 2, 3, 4)}_{k\text{-mal}}$$

Nur in manchen Fällen benötigen wir andere Folgen.

■ *Fall A:*

Der mit  $A$  gekennzeichnete Knoten wurde von Alice o.B.d.A. mit 1, 2 oder 3 gefärbt (ansonsten permutiere 3 und 4). Hier funktioniert die Farbfolge  $(1\,2\,3\,4)^k$ .

■ *Fall B:*

Der mit  $B$  gekennzeichnete Knoten wurde von Alice o.B.d.A. mit 3 gefärbt (ansonsten permutiere 3 und 4). Dann funktioniert die Farbfolge  $(1\,2\,3\,4)^k$ .

■ *Fall C:*

Falls der mit  $C$  gekennzeichnete Knoten mit 1 gefärbt wurde, funktioniert die Farbfolge  $(1\,2\,3\,4)^k$ . Ansonsten ist der Knoten o.B.d.A. mit 2 oder 3 gefärbt; dann verfährt Bob überhaupt nicht nach der hier vorgestellten Gewinnstrategie, sondern färbt den Knoten  $(1, -1)$  mit Farbe 4 und öffnet damit zwei Dreiertaschen zur gleichen Zeit. Durch keinen Zug kann Alice nun noch Bobs

Gewinn verhindern, da sie, wegen der speziellen Anordnung über Eck, nur eine Dreiertasche zerstören kann.

■ *Fall D:*

Falls der mit  $D$  gekennzeichnete Knoten mit 3 oder 4 gefärbt wurde, hat Alice selbst schon im zweiten Zug eine Dreiertasche hergestellt. Bob kann danach unmittelbar gewinnen, indem er  $(-1, 1)$  geeignet färbt. Ansonsten funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ .

■ *Fall E:*

Der mit  $E$  gekennzeichnete Knoten wurde von Alice o.B.d.A. mit 2 oder 3 gefärbt (ansonsten permutiere 3 und 4). Hier funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ .

■ *Fall F:*

Falls der mit  $F$  gekennzeichnete Knoten mit 2, 3 oder 4 gefärbt wurde, funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ . Falls er mit 1 gefärbt wurde, funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^{k-1} 2\ 1\ 3\ 4$ .

■ *Fall G:*

In jedem Fall funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ .

■ *Fall H:*

Falls der mit  $H$  gekennzeichnete Knoten mit 2, 3 oder 4 gefärbt wurde, funktioniert die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ . Falls er mit 1 gefärbt wurde, funktioniert die Farbfolge  $1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 2\ 3\ 4\ (1\ 2\ 3\ 4)^{k-2}$ . Dies muss deshalb so verdreht sein, damit, nachdem Bob Knoten  $(3, 1)$  gefärbt hat, die entstehende Dreiertasche eine Bedrohung darstellt und Alice unter Zugzwang setzt. Dies ist nicht die einzige Gelegenheit, in der wir  $m, n \geq 8$  ausgenutzt haben, sondern dies ging schon darin ein, dass wir Abbildung 6 überhaupt so zeichnen konnten (bei kleineren Torusgittergraphen müssen eventuell auch die Kanten von der Unter- zur Oberseite berücksichtigt werden).

■ *Fall I:*

Dies ist der Fall, wenn Alice einen der eingekreisten, in der Zeichnung mit  $I$  bezeichneten Knoten oder einen außerhalb des Zeichnungsbereiches liegenden Knoten  $(i, j)$  mit o.B.d.A.  $j \in \{4, 5, 6, \dots, n-5, n-4, n-3\}$  gefärbt hat. Solch ein Knoten kann natürlich gar keine Dreiertaschen zerstören. Deshalb funktioniert hier die Farbfolge  $(1\ 2\ 3\ 4)^k$ . □

### 5.3 Das Gegenbeispiel von Andres und die Unabhängigkeit von ungerichtetem und gerichtetem Knotenfärbungsspiel

Man betrachte folgenden gerichteten Graphen  $T_0$ , der  $TG_{2,2,2}$  mit in spezieller Weise gerichteten Kanten darstellt:

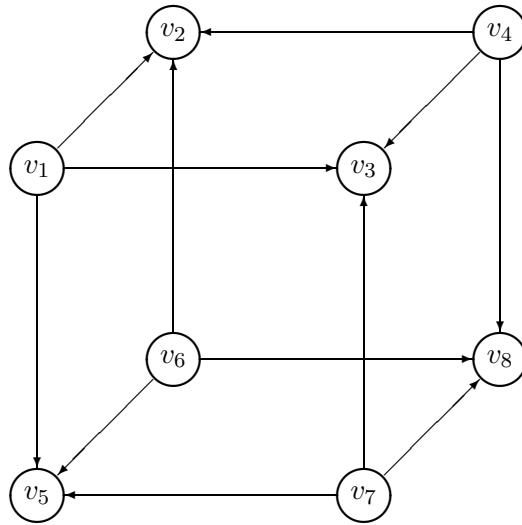


Abbildung 8: Das Beispiel von Andres: Der gerichtete Torusgittergraph  $T_0$

Lemma 20

Es gilt:

$$\vec{\chi}_{[A,A]}(T_0) = \vec{\chi}_{[B,A]}(T_0) = \vec{\chi}_{[B,-]}(T_0) \geq 3$$

#### Beweis:

Offenbar hat Bob eine Gewinnstrategie mit 0 oder 1 Farben. Mit 2 Farben besitzt Bob die folgende Gewinnstrategie: Im ersten Zug (falls sie ihn hat) setzt Alice entweder aus oder färbt (aus Symmetriegründen) o.B.d.A. den Knoten  $v_1$  oder  $v_2$  mit der ersten Farbe. Bob färbt in seinem ersten Zug  $v_7$  in der zweiten Farbe. Falls Alice nun  $v_1$ ,  $v_5$  oder  $v_6$  färbt, antwortet Bob durch Färben von  $v_4$  in der ersten Farbe, so dass in Folge  $v_8$  nicht mehr zulässig gefärbt werden kann. Falls andererseits Alice aussetzt oder einen anderen Knoten färbt, so antwortet Bob durch Färben von  $v_6$  in der ersten Farbe, so dass  $v_5$  nicht mehr zulässig gefärbt werden kann. Also gewinnt Bob in beiden Fällen.  $\square$

Lemma 21

Es gilt, wenn  $T_0$  als ungerichtet aufgefasst wird:

$$\chi_{[A,A]}(T_0) = \chi_{[B,A]}(T_0) = \chi_{[B,-]}(T_0) = 2$$

**Beweis:**

Offenbar hat Bob eine Gewinnstrategie mit 0 oder 1 Farben. Mit 2 Farben besitzt Alice die folgende Gewinnstrategie: Sie überlässt Bob den ersten Zug. Dieser färbt o.B.d.A.  $v_1$  mit der ersten Farbe. Alice färbt dann den raumdiagonal gegenüber liegenden Knoten  $v_8$  mit der zweiten Farbe. Dann sind die Färbungen aller weiteren Knoten festgelegt und somit möglich.  $\square$

Nun sieht man, dass das gerichtete Knotenfärbungsspiel nicht nur einfach ein abgeschwächtes ungerichtetes Knotenfärbungsspiel ist, sondern dass beide Spiele in gewisser Weise unabhängig voneinander sind.

Theorem 22

Es existieren Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit

$$\vec{\chi}_{[A,A]}(G_1) < \chi_{[A,A]}(G_1) \quad \text{und} \quad \vec{\chi}_{[A,A]}(G_2) > \chi_{[A,A]}(G_2)$$

$$\vec{\chi}_{[B,A]}(G_1) < \chi_{[B,A]}(G_1) \quad \text{und} \quad \vec{\chi}_{[B,A]}(G_2) > \chi_{[B,A]}(G_2)$$

$$\vec{\chi}_{[B,-]}(G_1) < \chi_{[B,-]}(G_1) \quad \text{und} \quad \vec{\chi}_{[B,-]}(G_2) > \chi_{[B,-]}(G_2)$$

**Beweis:**

Man nehme für  $G_1$  den Baum  $B_0$  aus 4.1 mit einer beliebigen Orientierung der Kanten und für  $G_2$  den oben definierten gerichteten Würfelgraphen  $T_0$ . Die linke Spalte von Ungleichungen gilt nach Satz 5 aus 4.1 und Satz 7 aus 4.2, die rechte folgt aus den beiden vorangegangenen Lemmata.  $\square$

## Teil II

# Kantenfärbungsspiele auf Wäldern

## 6 Allgemeine Vorgehensweise

In diesem zentralen Teil der Arbeit werden Kantenfärbungsspiele der Arten **(UKant)** bzw. **(GKant)** auf Wäldern betrachtet. Wesentliche Frage hierbei ist die Bestimmung der ungerichteten bzw. gerichteten spielchromatischen Indizes von geeigneten Teilklassen der Klasse aller Wälder  $\mathcal{W}$ .

Für gerichtete Wälder  $W$  gilt immer  $i(W) = \Delta(W)$  bzw.  $\vec{i}(W) = \Delta^+(W)$ . Somit sind ungerichteter bzw. gerichteter chromatischer Index auf der Klasse aller Wälder durch keine Konstante zu beschränken, gleiches erhält man für den ungerichteten bzw. gerichteten spielchromatischen Index, d.h.

$$i_{[X,Y]}(\mathcal{W}) = \infty \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}) = \infty$$

für  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Folglich ist die Klasse aller Wälder keine interessante Teilklassse.

Doch die Abhängigkeit des ungerichteten chromatischen Indexes von  $\Delta(W)$  motiviert zur Untersuchung der Klassen  $\mathcal{W}_\Delta$  aller Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ , wobei  $\Delta \in \mathbb{N}_0$  ist.

Die grundlegende Idee zur Vereinfachung der Betrachtungsweise liegt bei Kantenfärbungsspielen auf Wäldern in dem Begriff „unabhängiger Teilbäume“, der für das Spiel **(UKant)** erstmalig in [4] eingeführt wurde. Ein ähnlicher Begriff ist ja schon für Knotenfärbungsspiele auf Wäldern aus 4 bekannt.

### 6.1 Zerlegung in unabhängige Teilbäume

#### 6.1.1 Unabhängige Teilbäume bei der Spielart (UKant)

Sei  $W = (V, E)$  ein (als ungerichtet angenommener) Wald, auf dem das ungerichtete Kantenfärbungsspiel **(UKant)** gespielt werde. Wir betrachten eine bestimmte Spielsituation.

Dann ist ein *unabhängiger Teilbaum* ein Teilgraph  $B$  von  $W$ , zusammen mit der partiellen Färbung seiner Kanten, mit den Eigenschaften:

- (a)  $B$  ist Baum.
- (b) Alle (in der aktuellen Spielsituation) gefärbten Kanten von  $B$  sind Blätter von  $B$ .

- (c)  $B$  ist maximal (bezüglich Teilgrapheninklusion) unter Berücksichtigung von (a) und (b).

Zu Beginn des Spieles sind die unabhängigen Teilbäume gerade alle maximalen Teilbäume.

Wenn eine Kante in einem unabhängigen Teilbaum gefärbt wird, so müssen nur die Farben der Kanten dieses und keines anderen unabhängigen Teilbaums beachtet werden. Dies rechtfertigt den Namen.

Ein Zug, bei dem eine innere Kante eines unabhängigen Teilbaums  $B$  (und somit eine innere Kante von  $W$ ) gefärbt wird, zerlegt  $B$  in genau zwei neue unabhängige Teilbäume  $B'$  und  $B''$ , wobei die gerade gefärbte Kante in beiden vorkommt, alle anderen in genau einem. Ein Zug, bei dem ein ungefärbtes Blatt eines unabhängigen Teilbaums  $B$  (und somit ein Blatt von  $W$ ) gefärbt wird, führt  $B$  in genau einen neuen unabhängigen Teilbaum  $B'$  über.<sup>10</sup>

Somit werden während des gesamten Spiels Wälder unabhängiger Teilbäume in neue Wälder unabhängiger Teilbäume überführt. Durch die Menge der unabhängigen Teilbäume und der Zusatzinformation, welcher Spieler am Zug ist, wird der aktuelle Spielstand vollständig beschrieben.

### 6.1.2 Unabhängige Teilbäume bei der Spielart (GKant)

Sei nun  $W = (V, E)$  ein gerichteter Wald, auf dem das gerichtete Kantenfärbungsspiel (**GKant**) gespielt werde. Wir betrachten wieder eine bestimmte Spielsituation.

Dann ist ein *unabhängiger Teilbaum* ein Teilgraph  $B$  von  $W$ , zusammen mit der partiellen Färbung seiner Kanten, mit den Eigenschaften:

- (a)  $B$  ist Baum.
- (b) Alle (in der aktuellen Spielsituation) gefärbten Kanten von  $B$  sind nach innen gerichtete Blätter von  $B$ .
- (c)  $B$  ist maximal (bezüglich Teilgrapheninklusion) unter Berücksichtigung von (a) und (b).

---

<sup>10</sup>Man könnte zusätzlich einen Teilbaum, der nur aus zwei Knoten und einem gefärbten Blatt von  $W$  besteht, als unabhängigen Teilbaum definieren, und falls dieser sogar ein maximaler Teilbaum ist, ihn verdoppeln. Dadurch könnte man erreichen, dass das Färben jeder Kante einen unabhängigen Teilbaum in immer genau zwei unabhängige Teilbäume zerlegt. Die Idee dahinter ist die des Verdoppelns gerade gefärbter Kanten. Hier wurde aber ein formal schönerer Zugang gewählt. Der Nachteil, den man dabei in Kauf nehmen muss, ist, dass man manchmal von „ein oder zwei“ neuen unabhängigen Teilbäumen reden muss, anstatt einfach von „zwei“.

Auch hier sind zu Beginn des Spieles die unabhängigen Teilbäume gerade alle maximalen Teilbäume.

Im Unterschied zum ungerichteten Spiel haben hier nach außen gerichtete Blätter eines Teilbaums, sobald sie gefärbt wurden, keinerlei Einfluss auf die Färbungen der anderen Kanten dieses Teilbaums mehr. Somit müssen bei Färbung einer Kante in einem unabhängigen Teilbaum nur die Färbungen dieses unabhängigen Teilbaums beachtet werden.

Ein Zug, bei dem eine Kante eines unabhängigen Teilbaums  $B$  gefärbt wird, die nicht nach innen gerichtetes Blatt von  $B$  ist, zerlegt  $B$  in genau zwei neue unabhängige Teilbäume  $B'$  und  $B''$ . Die Kantenmengen von  $B'$  und  $B''$  sind dabei disjunkt. Ein Zug, bei dem ein ungefärbtes, nach innen gerichtetes Blatt eines unabhängigen Teilbaums  $B$  gefärbt wird, führt  $B$  in genau einen neuen unabhängigen Teilbaum  $B'$  über.<sup>11</sup>

Ein Beispiel zum unterschiedlichen Zerlegungsverhalten unabhängiger Teilbäume bei den Spielarten **(UKant)** bzw. **(GKant)** wird in Abbildung 10 auf Seite 60 dargestellt.

## 6.2 Kantenfärbungsspiele auf Klassen von trivialen Wäldern

Satz 23

Seien  $X \in \{A, B\}$ ,  $Y \in \{A, -, B\}$ ,  $\Delta \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta \leq 2$ . Bezeichne  $\mathcal{W}_\Delta$  die Klasse aller gerichteten Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ . Dann gelten:

$$i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \begin{cases} \Delta & \text{falls } \Delta \in \{0, 1\} \\ \Delta + 1 & \text{falls } \Delta = 2 \end{cases}$$

$$\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \Delta \quad \text{falls } \Delta \in \{0, 1\}$$

Ferner hat man:

$$\vec{i}_{[A,A]}(\mathcal{W}_2) = 2 \quad \vec{i}_{[A,-]}(\mathcal{W}_2) = 3 \quad \vec{i}_{[A,B]}(\mathcal{W}_2) = 3$$

$$\vec{i}_{[B,A]}(\mathcal{W}_2) = 2 \quad \vec{i}_{[B,-]}(\mathcal{W}_2) = 3 \quad \vec{i}_{[B,B]}(\mathcal{W}_2) = 3$$

**Beweis:**

Die Aussagen mit  $\Delta \in \{0, 1\}$  sind trivial.

Zum Beweis von  $i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_2) = 3$  geben uns die allgemeinen Abschätzungen aus 3.7 die obere Abschätzung; es genügt also, einen Wald  $W \in \mathcal{W}_2$

<sup>11</sup>Auch hier lässt sich mit einer geänderten Definition erreichen, dass immer in zwei unabhängige Teilbäume zerlegt wird.

mit spielchromatischem Index 3 anzugeben. Ein solcher ist offenbar der Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5$  der Länge 5. (Wenn Bob den ersten echten Zug ausführen muss, so färbt er  $e_3$ , danach kann er offensichtlich einen Gewinn erzwingen, indem er eine Kante im Abstand 1 zu einer gefärbten Kante mit einer anderen Farbe färbt.)

Offenbar gilt  $2 \leq \vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_2) \leq 3$ . Wir zeigen zunächst für jeden gerichteten Wald  $W \in \mathcal{W}_2$ , dass Alice eine Gewinnstrategie für die Spiele, bei denen sie aussetzen darf, mit 2 Farben hat. Dazu definieren wir, dass ein unabhängiger Teilbaum *erlaubt* heißt, falls für jede gefärbte Kante  $e_0 = (x_0, x_1)$  nicht gilt:

- (A) Es gibt Knoten  $x_2$  und  $x_3$  in dem unabhängigen Teilbaum sowie ungefärbte Kanten  $e_1 = (x_1, x_2)$  und  $e_2 = (x_3, x_2)$ .
- (B) Es gibt Knoten  $x_2$  und  $x_3$  in dem unabhängigen Teilbaum sowie ungefärbte Kanten  $e_1 = (x_2, x_1)$  und  $e_2 = (x_3, x_2)$ .

Am Anfang des Spiel ist jeder unabhängige Teilbaum erlaubt, da noch keine Kanten gefärbt sind. Die Strategie von Alice besteht darin, auszusetzen, es sei denn nach Bobs Zug entsteht ein unabhängiger Teilbaum, der nicht erlaubt ist. In letzterem Fall führt sie einen Zug aus, der gewährleistet, dass danach wieder alle unabhängigen Teilbäume erlaubt sind. Bob kann höchstens einen verbotenen Teilbaum erzeugen, der auch, wenn er zwei gefärbte Kanten hat, höchstens an einem Ende eine Konfiguration (A) oder (B) hat. (Andernfalls hätte es eine Konfiguration schon nach dem Zug von Alice geben müssen.) Falls Bob eine Konfiguration (A) erzeugt hat, so färbt Alice die Kante  $e_2$  in der Farbe von  $e_0$ . Man beachte hierbei, dass eine mögliche adjazente Kante von  $e_2$ , die verschieden von  $e_1$  und nach innen gerichtetes Blatt im unabhängigen Teilbaum ist, nicht gefärbt sein kann, da sonst der unabhängige Teilbaum zwei Konfigurationen (A) enthalten würde. Falls Bob eine Konfiguration (B) erzeugt hat, so färbt Alice die Kante  $e_1$ . Bei beiden Zügen werden offenbar nicht nur die verbotenen Konfigurationen eliminiert, sondern es entstehen auch keine neuen verbotenen Konfigurationen. Ebenso ist klar, dass bei dieser Strategie von Alice niemals ein unabhängiger Teilbaum mit zwei verschieden gefärbten (nach innen gerichteten) Blättern und einer ungefärbten Kante dazwischen entsteht, da ein solcher nur aus einer der Konfigurationen (A) oder (B) durch Färben der jeweiligen Kante  $e_2$  in der zweiten, d.h. von der Farbe von  $e_0$  verschiedenen Farbe erhalten werden kann. Somit gewinnt Alice.

Nun sind noch für die Spiele, bei denen Alice nicht aussetzen darf, Wälder  $W \in \mathcal{W}_2$  anzugeben, mit  $\vec{i}_{[X,Y]}(W) = 3$ . Sei  $G_4$  der gerichtete Graph mit den Knoten  $v_0, v_1, v_2, v_3$  und  $v_4$ , sowie den Kanten  $e_1 = (v_0, v_1)$ ,  $e_2 = (v_1, v_2)$ ,  $e_3 = (v_3, v_2)$  und  $e_4 = (v_4, v_3)$ . Sei  $G_5$  der Graph, der  $G_4$  als Teilgraph enthält



und noch einen zusätzlichen Knoten  $v_5$  sowie die Kante  $e_5 = (v_4, v_5)$  besitzt, siehe auch Abbildung 9.

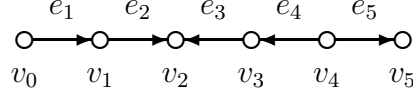


Abbildung 9: Der Graph  $G_5$

Bei den Spielen  $(\mathbf{GKant})[A, -]$ ,  $(\mathbf{GKant})[A, B]$  und  $(\mathbf{GKant})[B, B]$ , bei denen Alice zum ersten Zug gezwungen werden kann, hat Bob offenbar eine Gewinnstrategie auf  $G_4$  mit 2 Farben, wenn er Alice den ersten Zug überlässt und dann eine Kante im Abstand 1 zur von Alice gefärbten Kante mit einer zweiten Farbe färbt. Beim Spiel  $(\mathbf{GKant})[B, -]$  hat Bob folgende Gewinnstrategie auf  $G_5$  mit 2 Farben: Bob färbt die Kante  $e_5$ , danach liegt die gleiche Situation wie im anderen Fall ( $G_4$ , Alice fängt an) vor.<sup>12</sup>  $\square$

### 6.3 Abschätzung der spielchromatischen Indizes

Man hat folgende Abschätzungen, die einmal mehr die enge Verbindung zwischen maximalem Knotengrad und spielchromatischem Index von Wäldern offenbaren:

Satz 24	<p>Seien <math>X \in \{A, B\}</math>, <math>Y \in \{A, -, B\}</math>, <math>\Delta \in \mathbb{N}</math>, <math>\Delta \geq 3</math>. Bezeichne <math>\mathcal{W}_\Delta</math> die Klasse aller gerichteten Wälder <math>W</math> mit <math>\Delta(W) \leq \Delta</math>. Dann gilt:</p> $\Delta + 1 \leq i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) \leq \Delta + 2$ $\Delta + 1 \leq \vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) \leq \Delta + 2$
---------	---

#### Beweis:

Wir werden zuerst die unteren Abschätzungen beweisen. Dazu ist ein Baum  $G$  anzugeben, auf dem Bob in jedem Falle mit  $\leq \Delta(G)$  Farben eine Gewinnstrategie hat. Wir werden einen gerichteten Baum angeben, den man sich im Falle der Spiele  $(\mathbf{UKant})$  als ungerichtet vorstelle.

<sup>12</sup>Man beachte, dass die analoge Strategie im ungerichteten Fall für Bob nicht aufgehen würde, wenn Alice im zweiten Zug  $e_2$  geeignet färben würde. Schon an diesem einfachen Graphen  $G_5$  zeigt sich, dass man unter Umständen auf vollkommen verschiedenen Wegen den ungerichteten spielchromatischen Index bzw. den gerichteten spielchromatischen Index bestimmen muss, selbst wenn beide Werte gleich sind.

Sei nun  $\Delta \geq 3$  und eine Menge  $F$  von höchstens  $\Delta$  Farben vorgegeben. Sei  $G = (V, E)$  der Graph mit

$$\begin{aligned} V &:= \{u\} \dot{\cup} \{v_i \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}\} \\ &\quad \dot{\cup} \{w_{ij} \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}, j \in \{1, 2\}\} \\ E &:= \{e_i = (v_i, u) \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}\} \\ &\quad \cup \{f_{ij} = (w_{ij}, v_i) \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}, j \in \{1, 2\}\} \end{aligned}$$

und paarweise verschiedenen  $v_i$  bzw.  $w_{ij}$ . Falls  $\#F < \Delta$  ist, so gewinnt Bob offensichtlich immer. Sei darum ab jetzt  $\#F = \Delta$ .

Die Strategie von Bob wird es sein, eine der Kanten  $e_i$  zu einer kritischen Kante zu machen, mit  $\Delta$  verschieden gefärbten eingehenden Kanten. Falls Bob anfängt, so färbt er eine der Kanten  $e_i$ . Ansonsten oder danach antwortet er auf jeden Zug von Alice so, dass er, falls Alice eine Kante  $f_{ij}$  färbt, die entsprechende Kante  $e_i$  färbt, falls Alice ein  $e_{i_1}$  färbt, ein anderes  $e_{i_2}$  färbt. Diese Strategie verfolgt Bob solange, bis die Situation eintritt, dass genau  $\Delta - 2$  der Kanten  $e_i$  gefärbt sind. Man beachte, dass dieser Zeitpunkt sowohl nach einem Zug von Alice als auch nach einem Zug von Bob eintreten kann. Dann ändert Bob seine Strategie. In seinem nächsten Zug färbt er eine Kante  $f_{i_0j}$ , wobei  $e_{i_0}$ ,  $f_{i_01}$ ,  $f_{i_02}$  noch ungefärbt sind, mit einer Farbe, die verschieden von allen Farben der  $e_i$  ist. Spätestens in seinem übernächsten Zug kann er dann die kritische Kante konstruieren, und Alice hat verloren.

Es bleiben noch die oberen Abschätzungen zu zeigen. Dazu sei  $G = (V, E)$  ein beliebiger Wald mit  $\Delta(G) \leq \Delta \geq 3$ . Wir werden eine Gewinnstrategie für Alice mit  $\Delta + 2$  Farben angeben, bei der nach jedem Zug von Alice jeder unabhängige Teilbaum höchstens  $\Delta$  gefärbte Blätter hat.

Nach dem ersten Zug von Alice ist diese Invariante sicherlich erfüllt. Man beachte, dass Bob einen unabhängigen Teilbaum  $T$  mit  $\Delta + 1$  gefärbten Kanten nur durch Aufspalten eines solchen mit  $\Delta$  gefärbten Kanten erzielen kann. Der andere Teilbaum, der bei dieser Zerlegung möglicherweise entstehen kann, ist ein harmloser, bei dem nur eine Kante, oder im gerichteten Fall gar keine, gefärbt ist.

Nun besitzt aber  $T$  niemals einen Sternpunkt bezüglich der gefärbten Kanten, da dieser ja sonst Knotengrad  $\Delta + 1$  besitzen müsste. Somit kann Alice eine „Mittelkante“ finden, d.h. eine Kante zwischen zwei Knoten der Sternpunktmenge, deren Färbung  $T$  in zwei unabhängige Teilbäume mit jeweils höchstens  $\Delta$  gefärbten Kanten zerlegt. Dazu benötigt Alice maximal eine  $\Delta + 2$ te Farbe.

Somit wird jede Kante im Verlauf des Spiels zulässig gefärbt. □

## 6.4 Verschärfung von Satz 24

In den kommenden Abschnitten von Teil II sollen die oberen Abschätzungen in Satz 24 verschärft werden. Insgesamt erhält man damit das Hauptresultat dieser Arbeit:

### Theorem 25

Seien  $X \in \{A, B\}$ ,  $Y \in \{A, -, B\}$ ,  $\Delta \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta \geq 3$  und  $\Delta \neq 4$ . Bezeichne  $\mathcal{W}_\Delta$  die Klasse aller gerichteten Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ . Dann gilt:

$$i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \Delta + 1 \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \Delta + 1$$

- Der Fall  $\Delta = 3$  wird in Abschnitt 9 nach Vorarbeiten von Cai und Zhu [4] und He, Hou, Mi, Shao und Wang [12] erstmalig vollständig gelöst.
- Der Fall  $\Delta = 5$  wird in Abschnitt 8 gelöst.
- Der Fall  $\Delta \geq 6$  wurde von Erdős, Faigle, Hochstättler und Kern [8] für das ungerichtete Kantenfärbungsspiel bewiesen. In Abschnitt 7 findet sich ein in der Idee ähnlicher Beweis, der sowohl für das ungerichtete als auch für das gerichtete Spiel funktioniert.

**Die Beweisidee** dieser Unterfälle von Theorem 25 ist überwiegend ähnlich und kombinatorischer Natur. Es ist unter Beachtung von Satz 24 nur noch eine Gewinnstrategie von Alice mit  $\Delta + 1$  Farben anzugeben für beide Spielarten (**UKant**) und (**GKant**) auf einem Wald  $W \in \mathcal{W}_\Delta$ .

In jedem Fall gibt es eine gewisse Anzahl von „erlaubten Typen“ unabhängiger Teilbäume. Manche von ihnen sind bei allen Spielen (**UKant**)[ $X, Y$ ] und (**GKant**)[ $X, Y$ ] erlaubt,<sup>13</sup> andere nur bei den gerichteten Spielen (**GKant**)[ $X, Y$ ].

**1.** Die erlaubten Typen werden so beschaffen sein, dass zu Beginn des Spieles alle unabhängigen Teilbäume erlaubt sind.

**2.** Alice sorgt im gesamten Spiel dafür, dass nach jedem ihrer Züge alle unabhängigen Teilbäume erlaubt sind. Nach Bobs Zügen dürfen ruhig gewisse nicht erlaubte Typen unabhängiger Teilbäume auftreten.

**3.** Die erlaubten Typen werden so beschaffen sein, dass alle vollständig gefärbten unabhängigen Teilbäume von erlaubten Typen sind.

<sup>13</sup>Auf den ersten Blick kann dies widersinnig erscheinen, denn unabhängige Teilbäume bei (**UKant**) gehören einer anderen Kategorie an als solche bei (**GKant**). In 6.6 wird aber erläutert, dass gewisse Typen unabhängiger Teilbäume sowohl in der Kategorie der ungerichteten als auch in der der gerichteten Graphen beschrieben werden können

Um **2.** zu gewährleisten und gleichzeitig das Wichtigste zu garantieren, nämlich, dass das Spiel so lange weiter gespielt werden kann, wie noch ungefärbte Kanten vorhanden sind, muss nur für jeden erlaubten Typen seine „\*-Zerlegbarkeit“ gezeigt werden. Der letztere Begriff wird im nächsten Unterabschnitt definiert.

## 6.5 \*-Zerlegbarkeit

Ein unabhängiger Teilbaum  $B$  von einem erlaubten Typ heißt *\*-zerlegbar*, wenn folgende drei Bedingungen erfüllt sind:

- (a) Alice kann  $B$  in einem Zug in ein oder zwei unabhängige Teilbäume von erlaubten Typen zerlegen, falls  $B$  eine ungefärbte Kante enthält.
- (b) Bob kann einen Zug auf  $B$  ausführen, falls  $B$  eine ungefärbte Kante enthält.
- (c) Wenn Bob einen Zug auf  $B$  ausführt und  $B$  in ein oder zwei neue unabhängige Teilbäume zerlegt, so ist höchstens einer von diesen nicht von einem erlaubten Typen, und dieser eine kann im nächsten Zug von Alice in ein oder zwei unabhängige Teilbäume von erlaubten Typen zerlegt werden.

Offenbar ist (b) eine triviale Konsequenz von (a).

In den Zerlegungslemmata der einzelnen erlaubten Typen in den folgenden Abschnitten wird der Beweis von (a) immer als

FALL I: Alice ist am Zug.

auftauchen, und der Beweis von (c) als

FALL II: Bob ist am Zug.

Wenn alle erlaubten Typen \*-zerlegbar sind, so bedeutet dies für den Beweis von Satz 25:

(a) und (c) garantieren, dass Alice ziehen kann, solange die Invariante **2.** nach dem vorhergehenden Zug von Alice erfüllt ist und es noch ungefärbte Kanten gibt. (b) garantiert das gleiche für Bob. (a) und (c) stellen ferner sicher, dass die Invariante auch nach dem nächsten Zug von Alice gilt. Per Induktion folgt dann (falls **1.** gilt, was die Verankerung darstellt), dass die Invariante immer gilt und folglich beide Spieler ziehen können, solange es noch ungefärbte Kanten gibt. Somit gewinnt Alice das Spiel.

## 6.6 Einige Bemerkungen zum gerichteten Spiel

Grundsätzlich kann ein unabhängiger Teilbaum beim gerichteten Spiel auch als unabhängiger Teilbaum beim ungerichteten Spiel angesehen werden, indem man die Orientierungen der Kanten vernachlässigt. Andererseits definiert ein unabhängiger Teilbaum beim ungerichteten Spiel eine gesamte Klasse von unabhängigen Teilbäumen beim gerichteten Spiel, nämlich alle solchen, bei denen die gefärbten Blätter nach innen gerichtet sind und die ungefärbten Kanten mit einer beliebigen Orientierung versehen werden.

Somit können die Typen unabhängiger Teilbäume bei **(UKant)** als Typen unabhängiger Teilbäume bei **(GKant)** verstanden werden.

Nun kann die Zerlegung eines unabhängigen Teilbaums beim ungerichteten Spiel auch als Zerlegung eines entsprechenden unabhängigen Teilbaums beim gerichteten Spiel angesehen werden, wobei aber — je nach Orientierung der gefärbten Kante — zwei verschiedene Möglichkeiten der Zerlegung auftreten können.

Somit müsste man, bei den Beweisen der  $*$ -Zerlegbarkeit der erlaubten Typen, die sowohl bei **(UKant)** als auch bei **(GKant)** erlaubt sind, in jedem Unterfall jeweils drei Zerlegungen angeben: eine in erlaubte Typen beim ungerichteten Spiel und zwei in erlaubte Typen beim gerichteten Spiel. Wir werden meist nur die erste Zerlegung angeben, wenn der Zug beim gerichteten Spiel analog verläuft und relativ triviale Typen dabei entstehen. Nur bei großen Abweichungen von der ungerichteten Strategie werden wir dies vermerken.

Bemerkenswert ist, dass wir die Voraussetzung  $\Delta(W) \leq \Delta$  in Theorem 25 im Falle des gerichteten Spiels nicht auf  $\Delta^+(W) \leq \Delta$  abschwächen können. Es gilt nämlich folgender Satz:

Satz 26	<p>Seien <math>X \in \{A, B\}</math>, <math>Y \in \{A, -, B\}</math>, <math>\Delta \in \mathbb{N}_0</math>, <math>\Delta \geq 2</math>. Bezeichne <math>\mathcal{W}_\Delta^+</math> die Klasse aller Wälder <math>W</math> mit <math>\Delta^+(W) \leq \Delta</math>. Dann gilt:</p> $\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta^+) \geq \Delta + 2.$
---------	--

### Beweis:

Wir betrachten folgenden gerichteten Graphen  $G = (V, E)$ :

$$\begin{aligned}
 V &:= \{u_i \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}\} \dot{\cup} \{v\} \dot{\cup} \{w_j, x_j \mid j \in \{1, 2, \dots, \Delta + 2\}\} \\
 E &:= \{e_i = (u_i, v) \mid i \in \{1, 2, \dots, \Delta\}\} \\
 &\quad \cup \{f_j = (v, w_j), g_j = (x_j, w_j) \mid j \in \{1, 2, \dots, \Delta + 2\}\}
 \end{aligned}$$

Hierbei seien alle  $u_i$ ,  $w_j$  bzw.  $x_j$  paarweise verschieden. Den Teilbaum mit den Kanten  $f_j, g_j$  nennen wir  $j$ -ten Unterbaum. Offenbar gilt  $\Delta^+(G) = \Delta$  wegen  $\Delta \geq 2$ . Natürlich ist  $\Delta(G) = 2\Delta + 2$ , also wesentlich größer. Ferner ist klar, dass  $G$  ein Baum ist.

Seien  $\Delta + 1$  Farben vorgegeben. Zu zeigen ist, dass Bob nun bei Spielen der Art **(GKant)** eine Gewinnstrategie hat. Diese sieht wie folgt aus:

Bob färbt solange die Kanten  $e_i$ , bis alle verschieden gefärbt sind. Alice kann ihm währenddessen helfen und Kanten  $e_i$  färben, muss sie aber aufgrund der Struktur des Graphen verschieden färben, oder Kanten in einem  $j$ -ten Unterbaum färben. Da Bob maximal  $\Delta$  Züge benötigt, kann Alice Kanten in maximal  $\Delta + 1$  vielen  $j$ -ten Unterbäumen färben, also bleibt mindestens einer ungefärbt, wenn Bob das nächste Mal an die Reihe kommt. Sei dies der  $j_0$ -te Unterbaum. Nun färbt Bob  $g_{j_0}$  mit der letzten Farbe, die noch nicht unter den Farben der  $e_i$  vorkommt. Dadurch wird  $f_{j_0}$  zu einer Kante, die nicht mehr zulässig gefärbt werden kann, d.h. Bob wird gewinnen.  $\square$

## 6.7 Weitere Definitionen

Zur Vorbereitung der Gedankengänge der nächsten Abschnitte benötigen wir neben dem bereits eingeführten Begriff der unabhängigen Teilbäume noch einige weitere Bezeichnungen, die die sprachliche Formulierung der kommenden Beweise erleichtern.

### 6.7.1 Partielle Färbungen

Unter einer *partiellen Färbung* zu einem bestimmten Zeitpunkt des Spiels wollen wir eine Funktion verstehen, die auf der Menge der bis dahin gefärbten Kanten definiert ist, und deren Werte in der vorgegebenen Farbmenge liegen und die entsprechenden Färbungen darstellen.

### 6.7.2 Tragende Pfade und $v_0$ -Äste

Einen kreisfreien Pfad, dessen Kanten alle ungefärbt sind, nennen wir *tragenden Pfad*.

Sei  $v_0$  ein Knoten in einem unabhängigen Teilbaum  $T$ . Ein  $v_0$ -Ast ist ein Teilbaum maximaler Größe von  $T$ , in dem genau eine Kante mit  $v_0$  inzidiert. Anders ausgedrückt, mit der Definition aus 1.3, ist ein  $v_0$ -Ast ein maximaler an  $v_0$  hängender Teilbaum von  $T$ .

Ein  $v_0$ -Ast heißt *ungefärbt*, wenn alle seine Kanten ungefärbt sind. Er heißt *gefärbt*, wenn mindestens eine seiner Kanten gefärbt ist.

### 6.7.3 Sterne und Sternschnuppen

Wenn wir von *Sternpunktmenge* eines unabhängigen Teilbaums reden, so meinen wir immer damit die Sternpunktmenge bezüglich sämtlicher gefärbten Kanten dieses unabhängigen Teilbaums. Ebenso bezeichnen wir den Sternpunkt bezüglich sämtlicher gefärbten Kanten eines unabhängigen Teilbaums einfach als *Sternpunkt*.

Ein  $n$ -Stern ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) ist ein unabhängiger Teilbaum mit genau  $n$  gefärbten Kanten, der im Fall  $n \geq 3$  einen Sternpunkt besitzt.

Unabhängige Teilbäume mit genau  $n \leq 3$  gefärbten Kanten sind also immer  $n$ -Sterne. Es gibt aber unabhängige Teilbäume mit  $n \geq 4$  gefärbten Kanten, die keine  $n$ -Sterne sind. Eine wichtige Sorte wird in der folgenden Definition vorgestellt.

Als  $(n+1)$ -Sternschnuppe ( $n \geq 3$ ) bezeichnen wir einen unabhängigen Teilbaum mit genau  $n+1$  gefärbten Kanten  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$  und zwei ausgezeichneten Knoten  $v_0$  und  $v_1$ , die durch einen tragenden Pfad  $v_0 e_1 w_1 e_2 w_2 \dots e_k v_1$  der Länge  $k \geq 1$  verbunden sind, so dass gilt:

- (a)  $v_0$  ist Sternpunkt bezüglich  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, e_1$ .
- (b)  $v_1$  ist Sternpunkt bezüglich  $a_{n-1}, a_n, e_1$ .

$v_0$  wird dann auch der *Kopfunkt* und  $v_1$  der *Schwanzpunkt* der Sternschnuppe genannt.

### 6.7.4 Regularität

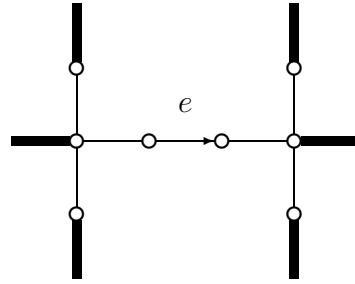
Ein  $n$ -Stern heißt *regulär*, wenn  $n \leq 2$  ist, oder wenn  $n \geq 3$  ist und mindestens eine seiner gefärbten Kanten an seinem Sternpunkt hängt.

Eine  $(n+1)$ -Sternschnuppe heißt *regulär*, wenn eine ihrer gefärbten Kanten an ihrem Kopfunkt hängt.

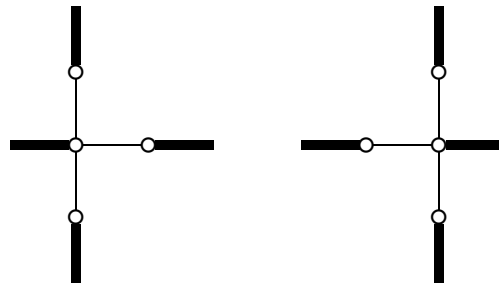
### 6.7.5 Stark unpassende Kanten

Eine gefärbte Kante in einem  $n$ -Stern heißt *stark unpassend*, wenn  $n \leq 2$  ist, oder wenn gilt, dass  $n \geq 3$  ist und die Kante Abstand 1 zu dem Sternpunkt hat und in einer Farbe gefärbt ist, die verschieden von den Farben der am Sternpunkt hängenden Kanten ist.

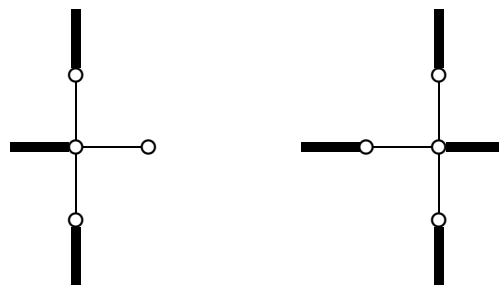
Eine zentrale Idee in sämtlichen kommenden Beweisen von Teil II besteht in der größtmöglichen Reduzierung der Anzahl von stark unpassenden Kanten in allen unabhängigen Teilbäumen.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 10: Zerlegung des unabhängigen Teilbaums in (a): ungefärbte Kanten (dünn gezeichnet), sofern keine explizite Richtung vorgegeben ist, seien beliebig orientiert, gefärbte Kanten (dick gezeichnet) seien nach innen gerichtete Blätter.

(b) Beim ungerichteten Kantenfärbungsspiel führt die Färbung von  $e$  zu einer Zerlegung in zwei 4-Sterne.

(c) Beim gerichteten Kantenfärbungsspiel entstehen dagegen bei der Färbung von  $e$  ein 3- und ein 4-Stern.



## 6.8 Erklärung der Zeichnungen

Zum Verständnis der Abbildungen von bestimmten Typen unabhängiger Teilbäume beim Beweis von Theorem 25 in den Fällen  $\Delta = 3$  bzw.  $\Delta = 5$  (Abschnitt 9 bzw. 8) sei an dieser Stelle folgendes angemerkt:

- Ein weißer Kreis bezeichnet einen Knoten vom Grad  $\leq \Delta$ .
- Ein schwarzer Kreis bezeichnet einen Knoten mit Knotengrad  $\Delta - 1$  (in dem unabhängigen Teilbaum).
- Knoten mit Grad 1 in dem unabhängigen Teilbaum (in dem ursprünglichen Wald kann ihr Knotengrad auch größer sein) werden nicht eingezeichnet.
- Eine dicke Linie bezeichnet eine gefärbte Kante. Diese ist bei **(GKant)** nach innen gerichtetes Blatt.
- Fettgedruckte Buchstaben **a**, **b**, **c**, **d**, **e** und **f** bezeichnen die Farbe einer Kante. Grundsätzlich kann jeder Buchstabe eine beliebige Farbe bezeichnen, innerhalb eines unabhängigen Teilbaums und beim zugehörigen Zerlegungslemma sollen jedoch verschiedene Buchstaben verschiedene Farben bedeuten. Ist eine dicke Linie unbeschriftet, so kann die Farbe dieser Kante beliebig sein, die Färbung muss aber zulässig sein.
- Eine dünne Linie bezeichnet eine ungefärbte Kante beliebiger Orientierung.
- Ein dünner Pfeil bezeichnet eine zur Pfeilspitze hin gerichtete Kante.
- Eine gestrichelte Linie bezeichnet einen ungefärbten Pfad der Länge  $\geq 0$ .
- Klammern bezeichnen die Länge gewisser Pfade.
- Sonstige Buchstaben bezeichnen die Namen von Kanten oder Knoten.
- An jedem weißen Knoten oder Knoten auf einem gestrichelten Pfad können nicht eingezeichnete ungefärbte Äste hängen.

## 7 Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit $\Delta \geq 6$

### 7.1 Verschärfung von Satz 24

In diesem Abschnitt beweisen wir ganz ähnlich wie in [8] Theorem 25 für den Fall  $\Delta \geq 6$ , also:

**Theorem 27**

(Erdős, Faigle, Hochstättler, Kern)

Sei  $\Delta \geq 6$  und  $G = (V, E)$  ein gerichteter Wald mit maximalem Knotengrad  $\Delta(G) \leq \Delta$ . Dann gilt

$$i_{[B, B]}(G) \leq \Delta + 1 \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[B, B]}(G) \leq \Delta + 1.$$

Dies bedeutet unter Beachtung von Satz 1 aus 3.9: Alice hat eine Gewinnstrategie sowohl für das ungerichtete als auch für das gerichtete Kantenfärbungsspiel auf  $G$  mit einer Anzahl von Farben, die kleiner oder gleich  $\Delta + 1$  ist, ganz gleich, ob Alice oder Bob beginnt, egal ob Aussetzen für genau einen oder keinen der Spieler erlaubt ist. Tatsächlich zeigt der Beweis sogar, dass Alice in allen Fällen eine Gewinnstrategie mit  $\Delta + 1$  Farben besitzt.

#### **Beweis des Theorems:**

Sei eine Farbmenge mit  $\Delta + 1$  Elementen vorgegeben.

Die Gewinnstrategie von Alice besteht darin, zu gewährleisten, dass nach jedem ihrer Züge jeder vorkommende unabhängige Teilbaum vom in 7.2 definierten erlaubten Typen  $S_n$  ist.

Zu Beginn des Spiels ist jeder unabhängige Teilbaum vom Typ  $S_0$ .

Die Behauptung folgt dann gemäß der allgemeinen Vorgehensweise von 6.4, wenn die \*-Zerlegbarkeit von Typ  $S_n$  ( $n \in \{0, 1, \dots, \Delta\}$ ) gezeigt wird, was in 7.3 erfolgt. Die Strategie bei der Zerlegung ist im Fall des ungerichteten wie gerichteten Spiels die gleiche.  $\square$

### 7.2 Die erlaubten Typen

Ein unabhängiger Teilbaum  $T$  vom Typ  $S_n$  ist ein  $n$ -Stern, der folgende Bedingungen erfüllt:

- (1)  $T$  ist regulär.
- (2) Falls der Sternpunkt in  $T$  vollen Knotengrad  $\Delta$  hat, so hat  $T$  höchstens  $\max(0, \Delta - 1 - n)$  stark unpassende Kanten.

BEMERKUNG: Der Unterschied zum Beweis in [8] liegt im wesentlichen in einer geänderten Definition der erlaubten Typen: Einerseits werden nur stark unpassende Kanten verboten, nicht aber sogenannte *unpassende*, andererseits steht in dem Maximum der Parameter  $\Delta$  anstelle des Wertes 6. Dieser Zugang wurde hier so gewählt, da hieraus die Abwandlung der Beweisidee für den Fall  $\Delta = 5$  (siehe Abschnitt 8) ersichtlich ist.

### 7.3 Zerlegung der erlaubten Typen

Lemma 28

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $S_n$ , der noch eine ungefärbte Kante enthält, wobei  $n \in \{0, 1, \dots, \Delta\}$  ist, in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Sei  $B$  vom Typ  $S_n$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B$  im Fall  $n \geq 3$ . Im Fall  $1 \leq n \leq 2$  sei  $v_0$  ein Endpunkt (oder Anfangspunkt) einer gefärbten Kante von  $B$  mit  $\delta_B(v_0) > 1$  (dieser existiert!), im Fall  $n = 0$  sei  $v_0$  ein beliebiger Knoten aus  $B$ .

Falls eine gefärbte Kante  $e$  von  $B$  nicht an  $v_0$  hängt, so färbt Alice die an  $v_0$  hängende Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $v_0$  verschieden von den anderen (höchstens  $\Delta$  vielen) Farben in  $B$ .

Falls andererseits alle gefärbten Kanten von  $B$  an  $v_0$  hängen, so inzidiert nach Voraussetzung ( $B$  ist noch nicht vollständig gefärbt) ebenfalls eine ungefärbte Kante mit  $v_0$ , diese färbt Alice zulässig.

FALL II: Bob ist am Zug.

Bob habe eine Kante gefärbt und  $B$  in ein oder zwei unabhängige Teilbäume  $B'$  (und evtl.  $B''$ ) zerlegt. Wenn  $B''$  existiert, so ist einer der Teilbäume vom Typ  $S_0$ ,  $S_1$  oder  $S_2$ . Falls der andere ebenfalls erlaubt ist, kann Alice auf einem beliebigen Teilbaum weiterspielen.

Sei im folgenden  $B'$  nicht erlaubt. Sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B$  im Falle, dass es einen Sternpunkt gibt, d.h. falls  $n \geq 3$ . Andernfalls sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B'$ . (Wenn sowohl  $B$  als auch  $B'$  keinen Sternpunkt besitzen würden, dann wäre  $B'$  erlaubt.)

Grundsätzlich kann  $B'$  auf drei verschiedene Arten aus  $B$  entstanden sein:

- Bob kann in  $B$  eine Kante in einem ungefärbten  $v_0$ -Ast gefärbt haben. Dann ist  $n \in \{2\} \cup \{\lfloor \frac{\Delta+1}{2} \rfloor - 1, \dots, \Delta - 1\}$  und  $B'$  ein  $(n+1)$ -Stern, auf den sich die Regularität von  $B$ , außer im Fall  $n = 2$ , überträgt.

- Bob kann eine Kante auf dem Pfad von einer gefärbten Kante nach  $v_0$  gefärbt haben. Dann ist  $n \in \{\lfloor \frac{\Delta+1}{2} \rfloor, \dots, \Delta\}$  und  $B'$  ein neuer regulärer  $n$ -Stern.
- Bob kann eine Kante in einem gefärbten  $v_0$ -Ast gefärbt haben, die nicht auf dem Pfad von einer gefärbten Kante nach  $v_0$  liegt. In diesem Fall ist  $n \in \{3, 4, \dots, \Delta\}$  und  $B'$  eine reguläre  $(n+1)$ -Sternschnuppe.

Wenn ein neuer  $k$ -Stern entstanden ist, so besitzt dieser höchstens eine stark unpassende Kante mehr als  $B$ . Im allgemeinen hat also  $B'$  als  $k$ -Stern höchstens zwei stark unpassende Kanten mehr als nach (2) für einen Typen  $S_k$  erlaubt sind, falls  $k = \Delta$ , so höchstens eine stark unpassende Kante.

Wir werden jetzt für die beiden möglichen Fälle ( $(n+1)$ -Sternschnuppe bzw.  $k$ -Stern) die Vorgehensweise von Alice angeben.

■ *Fall 1:  $B'$  ist  $k$ -Stern*

Hier wird Alice immer eine Kante färben, die an  $v_0$  hängt, so dass aus  $B'$  ein Typ  $S_k$  oder  $S_{k+1}$  wird, wobei eventuell noch ein trivialer Typ  $S_0$ ,  $S_1$  oder  $S_2$  abgespalten wird.

■ ■ *Fall 1.A:  $k = 3$*

$B'$  verstößt hier auf jeden Fall gegen die Regularität. Alice färbt dann die an  $v_0$  hängende ungefärbte Kante in einem der drei gefärbten  $v_0$ -Äste. Damit ist auch die Anzahl der stark unpassenden Kanten  $\leq 2 \leq \Delta - 1 - k$ .

■ ■ *Fall 1.B:  $\lfloor \frac{\Delta+1}{2} \rfloor \leq k \leq \Delta - 1$ ,  $k \neq 3$*

Hier ist  $\delta_{B'}(v_0) = \Delta$ , also existiert ein ungefärbter  $v_0$ -Ast. Eine einzelne stark unpassende Kante kann offenbar auf einfache Weise eliminiert werden. Zwei stark unpassende Kanten  $a_1$  und  $a_2$ , die in verschiedenen Farben gefärbt sind, eliminiert Alice im ungerichteten Fall dadurch, dass sie die Kante zwischen  $a_1$  und  $v_0$  in der Farbe von  $a_2$  färbt. Im gerichteten Fall geht sie genauso vor und erhält ebenfalls eine Zerlegung in erlaubte Typen. (Falls sie dabei nur eine stark unpassende Kante eliminiert, so hat aber  $v_0$  nur noch Knotengrad  $\Delta - 1$  im neu entstandenen unabhängigen Teilbaum, der somit, da die Regularität erhalten bleibt, erlaubt ist.) Falls alle stark unpassenden Kanten in der gleichen Farbe gefärbt sind, so färbt Alice die an  $v_0$  hängende Kante in einem ungefärbten  $v_0$ -Ast mit dieser Farbe, wodurch wieder (2) hergestellt wird.

■ ■ *Fall 1.C:  $k = \Delta$*

Alice färbt die Kante zwischen der einzigen stark unpassenden Kante und dem Sternpunkt  $v_0$ .

■ *Fall 2:  $B'$  ist  $(n+1)$ -Sternschnuppe*

Es ist  $v_0$  der Kopfpunkt und sei  $v_1$  der Schwanzpunkt der Sternschnuppe und  $v_0 e_1 w_1 e_2 \dots e_{h-1} w_{h-1} e_h v_1$  der kreisfreie Pfad von  $v_0$  nach  $v_1$  mit  $h \geq 1$ .

■ ■ *Fall 2.A:  $h = 1$*

Hier färbt Alice  $e_1$  zulässig. Dies ist möglich, da in dem einzigen Fall  $n = \Delta$ , in dem  $\Delta + 1$  gefärbte Kanten zu  $e_1$  adjazent sein können, die Bedingung (2) für  $B$  nun für  $B'$  impliziert, dass die zu  $e_1$  adjazenten Kanten in höchstens  $\Delta$  verschiedenen Farben gefärbt sein können. Offenbar hat der neu entstehende  $n$ - oder  $(n - 1)$ -Stern mit Sternpunkt  $v_0$  höchstens so viele stark unpassende Kanten wie  $B$ , ist ferner wegen der Regularität von  $B$  regulär, somit erlaubt.

■ ■ *Fall 2.B:  $h \geq 2$*

Falls eine gefärbte Kante an  $v_1$  hängt, so färbt Alice  $e_1$  zulässig. Beide entstehenden neuen unabhängigen Teilbäume sind offenbar von gewissen Typen  $S_m$ .

Falls andererseits keine gefärbte Kante an  $v_1$  hängt, so ist die Färbung von  $e_h$  in einer der Farben der an  $v_0$  hängenden Kanten zulässig. Die Bedingung (1) für  $B$  garantiert die Existenz einer an  $v_0$  hängenden gefärbten Kante. Diese spezielle Wahl der Farbe führt dazu, dass der neu entstehende  $n$ - oder  $(n - 1)$ -Stern mit Sternpunkt  $v_0$  nicht mehr stark unpassende Kanten als  $B$  hat und somit erlaubt ist. Die Wahl der Kante führt dazu, dass der neu entstehende 2- oder 3-Stern mit Sternpunkt  $v_1$  regulär, also erlaubt ist. Dies schließt die Fallunterscheidung und damit den Beweis ab.  $\square$

Dieses Lemma beweist Theorem 27, und damit Theorem 25 im Fall  $\Delta \geq 6$ .

## 8 Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit $\Delta = 5$

### 8.1 Verschärfung von Satz 24

Hier betrachten wir die Kantenfärbungsspiele **(UKant)** bzw. **(GKant)**, diesmal auf einem Wald  $G$  mit maximalem Knotengrad  $\Delta(G) \leq 5$ . Ziel wird es sein, folgendes Theorem zu beweisen:

**Theorem 29**

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Wald mit maximalem Knotengrad  $\Delta(G) \leq 5$ . Dann gilt

$$i_{[B,B]}(G) \leq 6 \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[B,B]}(G) \leq 6$$

Dies bedeutet unter Beachtung von Satz 1 aus Kapitel 3.9: Alice hat eine Gewinnstrategie sowohl für das ungerichtete als auch für das gerichtete Kantenfärbungsspiel auf  $G$  mit einer Anzahl von Farben, die kleiner oder gleich 6 ist, ganz gleich, ob Alice oder Bob beginnt, egal ob Aussetzen für genau einen oder keinen der Spieler erlaubt ist. Tatsächlich wird sogar die Existenz einer Gewinnstrategie mit 6 Farben in allen Fällen gezeigt.

#### **Beweis des Theorems:**

Sei die Farbmenge  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  vorgegeben und  $G = (V, E)$  ein Wald mit  $\Delta(G) \leq 5$ .

Wir werden eine solche Strategie von Alice angeben, bei der nach jedem ihrer Züge und vor Bobs jeweils nächstem Zug jeder vorkommende unabhängige Teilbaum von einem der in 8.2 definierten erlaubten Typen  $U, Z, W, Y, A, B, C, S_n$  ( $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ) oder  $V'_1, Y', A', B', C', C''$  ist, wobei die letzten sechs genannten Typen nur in der Strategie beim gerichteten Spiel erlaubt sind.

Vorgreifend erwähnenswert ist, dass alle vollständig ungefärbten maximalen Teilbäume den Typen  $S_0$  bilden, somit ist zu Beginn des Spiels jeder unabhängige Teilbaum vom Typ  $S_0$ .

Also genügt es gemäß der allgemeinen Vorgehensweise von 6.4, für den Beweis der Behauptung die  $*$ -Zerlegbarkeit jedes einzelnen Typen zu zeigen. Hierbei ist darauf zu achten, dass im ungerichteten Fall die ersten 8 Typen nur in ebensolche Typen zerlegt werden. Im gerichteten Fall dagegen dürfen alle 14 Typen benutzt werden. Die Beweise stehen in 8.3 und 8.4.  $\square$

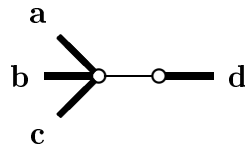
## 8.2 Die erlaubten Typen

In diesem Abschnitt werden wir die Typen unabhängiger Teilbäume definieren, die nach einem Zug von Alice, vor Bobs nächstem Zug als „erlaubt“ gelten.

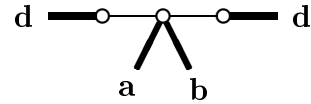
Zum Verständnis der Abbildungen vergleiche man die Erklärungen in 6.8. Hierbei sei ein weißer Kreis ein Knoten vom Grad  $\leq 5$  und ein schwarzer Kreis ein Knoten mit genauem Knotengrad 4. Die Buchstaben **a**, **b**, **c**, **d**, **e** und **f** bezeichnen die verschiedenen Farben.

### 8.2.1 Was sollte verboten sein?

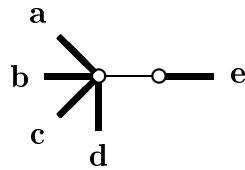
Man betrachte folgende Typen von unabhängigen Teilbäumen:



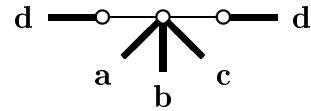
Typ  $V_1$



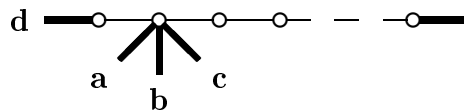
Typ  $V_2$



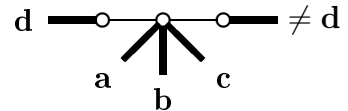
Typ  $F_1$



Typ  $F_2$



Typ  $F_3$



Typ  $F_4$

Abbildung 11: Spezielle verbotene Typen

Typ  $F_1$  sollte offensichtlich nach dem Zug von Alice verboten sein, da Bob sonst im nächsten Zug eine kritische Kante konstruieren kann.

Typ  $F_2$  ist eine sehr problematische Konfiguration. Auf ihr hat Bob (falls genügend viele ungefärbte Kanten vorhanden sind) immer eine Gewinnstrategie, also darf sie weder nach Bobs noch nach Alice's Zug auftreten. Die in [8] vorgestellte Strategie von Alice im Fall  $\Delta \geq 6$  funktioniert deshalb nicht im

Fall  $\Delta = 5$ , weil sie nicht ausschließen kann, dass nach Bobs Zug Typ  $F_2$  entsteht, wie auch schon in [8] bemerkt wurde. Daher ist die in diesem Kapitel vorgestellte Strategie wesentlich aufwendiger.

Da wir Bob nicht verbieten können, eventuell Typ  $F_2$  herzustellen, muss Alice dafür Sorge tragen, dass nach ihrem Zug niemals eine Konfiguration auftritt, aus der Bob  $F_2$  machen könnte. Somit sollten die Typen  $V_1$ ,  $V_2$  und  $F_3$  ebenfalls nach dem Zug von Alice verboten sein.

Ebenfalls problematisch ist die Konfiguration  $F_4$ . Wenn Bob eine Kante geeignet färbt, entsteht ein ähnliches Problem wie bei  $F_2$ . Alice wird dann entweder gezwungen sein, den verbotenen Typ  $F_1$  zu erzeugen, oder hilflos mitanzusehen müssen, wie Bob in einem der nächsten Züge eine kritische Kante erzeugt.

Was haben diese Typen gemeinsam? Sie haben alle einen Sternpunkt. Sie haben alle genau vier oder fünf gefärbte Kanten. Und sie haben alle mindestens eine stark unpassende Kante.

Also liegt die Idee nahe, zunächst einmal nur solche unabhängigen Teilbäume mit Sternpunkt zu erlauben, die keine stark unpassende Kante besitzen, falls sie vier oder fünf gefärbte Kanten besitzen. Doch damit werden wir nicht ganz auskommen.

Einerseits werden wir die Klasse solcher unabhängigen Teilbäume noch einschränken durch den Begriff der *Regularität*, andererseits werden wir noch zusätzliche Typen erlauben.

### 8.2.2 Die Typen $S_n$

Offensichtlich kann Alice so spielen, dass nach jedem ihrer Züge jeder vorkommende unabhängige Teilbaum ein regulärer  $n$ -Stern mit  $0 \leq n \leq 5$  ist. Leider kann es dabei passieren, dass sie eventuell eine siebte Farbe benötigt. (Man vergleiche Satz 24.) Um dies zu umgehen, werden wir stark unpassende Kanten in geeigneter Weise verbieten.

Ein  $n$ -Stern  $T$  ist genau dann vom erlaubten Typen  $S_n$ , wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- (1)  $T$  ist regulär
- (2) Falls  $n \geq 4$  ist und der Sternpunkt vollen Knotengrad 5 hat, so hat  $T$  keine stark unpassenden Kanten.

Man beachte, dass zu Beginn des Spiels alle unabhängigen Teilbäume vom Typ  $S_0$  sind. Alice wird, falls möglich, alle nach Bobs Zug entstehenden unabhängigen Teilbäume in Typen  $S_m$  zerlegen. Da dies jedoch nicht immer mög-



lich sein wird, benötigen wir weitere erlaubte Typen, die in 8.2.3 vorgestellt werden.

### 8.2.3 Die anderen erlaubten Typen

Eine Übersicht über alle weiteren beim ungerichteten Kantenfärbungsspiel benötigten erlaubten Typen unabhängiger Teilbäume gibt Abbildung 12.

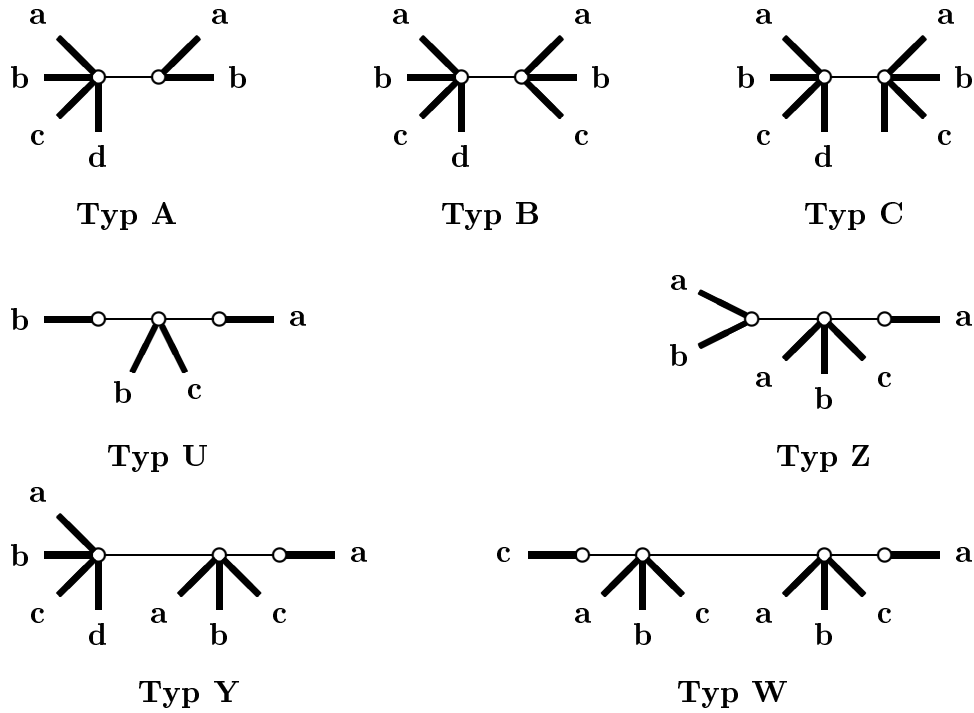


Abbildung 12: Die erlaubten Typen (außer  $S_n$ ).

Beim gerichteten Kantenfärbungsspiel sind zunächst die gleichen Typen erlaubt, wobei hier gefärbte Kanten immer nach innen gerichtete Blätter eines unabhängigen Teilbaums sein sollen, und die ungefärbten Kanten beliebig orientiert seien. Zusätzlich sind noch die in Abbildung 13 dargestellten Typen erlaubt, wobei für die Richtungen der Kanten das gerade Gesagte gelten soll, bis auf die eine Kante in Typ  $V'_1$ , bei der die Richtung zwingend vorgegeben ist.

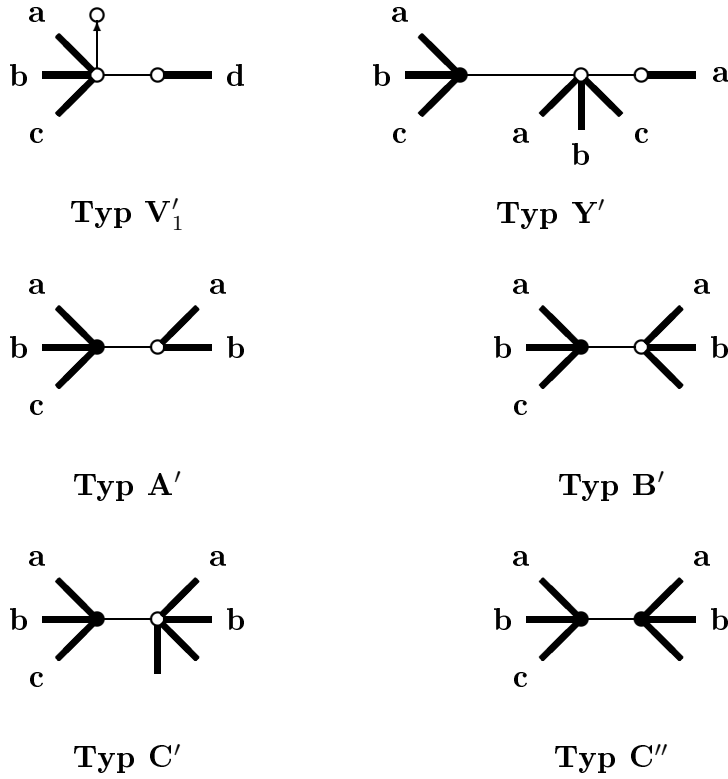


Abbildung 13: Die beim gerichteten Spiel zusätzlich erlaubten Typen

### 8.3 Zerlegung der erlaubten Typen

**Lemma 30**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $S_n$ , der noch eine ungefärbte Kante enthält, wobei  $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$  ist, in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $S_n$ .

**A.** Zunächst beweisen wir das Lemma in dem Fall, dass das ungerichtete Kantenfärbungsspiel (**UKant**) gespielt wird. Dass der Beweis im Fall des gerichteten Spiels vollkommen analog oder sogar einfacher verläuft wird im Anschluss erläutert.

FALL I: Alice ist am Zug.

Sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B$  im Fall  $n \geq 3$ . Im Fall  $1 \leq n \leq 2$  sei  $v_0$  ein Endpunkt (oder Anfangspunkt) einer gefärbten Kante von  $B$  mit  $\delta_B(v_0) > 1$  (dieser existiert!), im Fall  $n = 0$  sei  $v_0$  ein beliebiger Knoten aus  $B$ .

Falls eine gefärbte Kante  $e$  von  $B$  nicht an  $v_0$  hängt, so färbt Alice die an  $v_0$  hängende ungefärbte Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $v_0$  verschieden von den anderen (höchstens fünf) Farben in  $B$ . Dabei entstehen Typ  $S_2$  und ein neuer regulärer  $n$ -Stern, der sicherlich nicht mehr stark unpassende Kanten hat als  $B$  und somit selbst vom Typ  $S_n$  ist.

Falls andererseits alle gefärbten Kanten von  $B$  an  $v_0$  hängen, so inzidiert nach Voraussetzung ebenfalls eine ungefärbte Kante mit  $v_0$ , diese färbt Alice von den anderen (höchstens vier) Farben verschieden und erhält Typ  $S_{n+1}$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Bob habe eine Kante gefärbt und  $B$  in ein oder zwei unabhängige Teilbäume  $B'$  (und evtl.  $B''$ ) zerlegt. Wenn  $B''$  existiert, so ist einer der Teilbäume vom Typ  $S_1$  oder  $S_2$ . Falls der andere ebenfalls erlaubt ist, kann Alice auf einem beliebigen Teilbaum weiterspielen.

Sei im folgenden  $B'$  nicht erlaubt. Sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B$  im Falle, dass es einen Sternpunkt gibt, d.h. falls  $n \geq 3$ . Andernfalls sei  $v_0$  der Sternpunkt von  $B'$ . (Wenn sowohl  $B$  als auch  $B'$  keinen Sternpunkt besitzen würden, dann wäre  $B$  vom Typ  $S_0$ ,  $S_1$  oder  $S_2$  und  $B'$  vom Typ  $S_1$  oder  $S_2$ , also erlaubt, im Widerspruch zu unserer Annahme.)

Grundsätzlich kann  $B'$  auf drei verschiedene Arten aus  $B$  entstanden sein:

- Bob kann in  $B$  eine Kante in einem ungefärbten  $v_0$ -Ast gefärbt haben. Dann ist  $n \in \{2, 3, 4\}$  und  $B'$  ein  $(n + 1)$ -Stern, auf den sich die Regularität von  $B$  außer im Fall  $n = 2$  überträgt.
- Bob kann eine Kante auf dem Pfad von einer gefärbten Kante nach  $v_0$  gefärbt haben. Dann ist  $n \in \{4, 5\}$  und  $B'$  ein neuer regulärer  $n$ -Stern.
- Bob kann eine Kante in einem gefärbten  $v_0$ -Ast gefärbt haben, die nicht auf dem Pfad von einer gefärbten Kante nach  $v_0$  liegt. In diesem Fall ist  $n \in \{3, 4, 5\}$  und  $B'$  eine  $(n + 1)$ -Sternschnuppe.

Wenn ein neuer  $k$ -Stern entstanden ist, so besitzt dieser höchstens eine stark unpassende Kante mehr als  $B$ . Konkret bedeutet dies, dass  $B'$  höchstens 3 stark unpassende Kanten hat, wenn er ein 4-Stern ist, und höchstens eine, wenn er 5-Stern ist. (Man beachte hierbei, dass wenn  $v_0$  keinen vollen Knotengrad 5 hat, auch  $B'$  niemals zu einem 5-Stern werden kann.) Ferner ist der  $k$ -Stern regulär außer im Fall  $k = 3$ . (Denn es hing ja schon in  $B$  eine gefärbte Kante an  $v_0$  falls  $n \in \{3, 4, 5\}$  war.)

Wir werden jetzt für die beiden möglichen Fälle ( $(n + 1)$ -Sternschnuppe bzw.  $k$ -Stern) die Vorgehensweise von Alice angeben.

■ *Fall 1:  $B'$  ist  $k$ -Stern*

Hier wird Alice immer eine Kante färben, die am Sternpunkt hängt. Wenn es keine solche Kante gäbe, wäre  $B'$  erlaubt. Die Wahl dieser Kante erfordert einige Fallunterscheidungen.

- (+) Man beachte, dass Alice eine einzelne stark unpassende Kante  $\tilde{e}$  und eventuell jede stark unpassende Kante einer zweiten verschiedenen Farbe dadurch eliminieren kann, dass sie die Kante zwischen  $\tilde{e}$  und dem Sternpunkt  $v_0$  in der zweiten Farbe (falls sie existiert, ansonsten in einer beliebigen zulässigen Farbe) färbt.

Diese Bemerkung wird uns den Beweis erleichtern.

■ ■ *Fall 1.A:  $k = 3$*

In diesem Fall verstößt  $B'$  gegen die Regularität. Alice färbt die an  $v_0$  hängende ungefärbte Kante in einem der drei gefärbten  $v_0$ -Äste mit einer zulässigen Farbe.

■ ■ *Fall 1.B:  $k = 4$*

Dies ist der interessanteste Fall. Hierbei kann  $B'$  bis zu 3 stark unpassende Kanten haben. Diese sollten eliminiert werden.

Falls  $B'$  genau eine stark unpassende Kante hat, so geht Alice nach (+) vor.

Falls  $B'$  genau zwei verschieden gefärbte stark unpassende Kanten besitzt, so geht Alice nach (+) vor.

Falls  $B'$  genau zwei stark unpassende Kanten besitzt, die gleich gefärbt sind, dann färbt Alice die am Sternpunkt hängende Kante in einem anderen  $v_0$ -Ast in der Farbe der beiden stark unpassenden Kanten. (Falls dies nicht möglich wäre, falls also kein solcher  $v_0$ -Ast existieren würde, wäre  $B'$  schon regulär und hätte einen Sternpunkt mit Grad 4, somit wäre also auch (2) erfüllt, also wäre  $B'$  schon erlaubt, im Gegensatz zu unserer Annahme.)

Falls  $B'$  genau drei stark unpassende Kanten in der selben Farbe besitzt, so geht Alice ganz genau so vor.

Falls  $B'$  genau drei stark unpassende Kanten besitzt, die in genau zwei verschiedenen Farben gefärbt sind, so geht Alice nach (+) vor und eliminiert alle.

Falls  $B'$  genau drei stark unpassende Kanten besitzt, die in drei verschiedenen Farben gefärbt sind, so eliminiert Alice zwei von ihnen gemäß (+) und erhält Typ  $U$ .

■ ■ *Fall 1.C:  $k = 5$*

In diesem Fall hat  $B'$  nur eine stark unpassende Kante, wie oben bemerkt. Diese eliminiert Alice nach (+).

■ *Fall 2:  $B'$  ist  $(n + 1)$ -Sternschnuppe*

Es ist  $v_0$  der Kopfpunkt und sei  $v_1$  der Schwanzpunkt der Sternschnuppe und  $v_0 e_1 w_1 e_2 w_2 \dots e_{l-1} w_{l-1} e_l v_1$  der kreisfreie Pfad von  $v_0$  nach  $v_1$  mit  $l \geq 1$ .

■ ■ *Fall 2.A:  $l = 1$*

Hier färbt Alice  $e_1$  mit einer Farbe, die verschieden von den Farben der zu  $e_1$  adjazenten gefärbten Kanten ist. Im Fall  $n \in \{3, 4\}$  ist die Existenz solch einer Farbe offensichtlich. Im Fall  $n = 5$  können zwar bis zu 6 gefärbte Kanten adjazent zu  $e_1$  sein, doch wenn 6 gefärbte Kanten adjazent zu  $e_1$  sind, so sind diese in höchstens 5 verschiedenen Farben gefärbt. (Andernfalls hätte  $B$ , aus dem  $B'$  entstanden ist, eine stark unpassende Kante gehabt, im Widerspruch dazu, dass  $B$  vom erlaubten Typen  $S_5$  war.) Somit kommt Alice mit 6 Farben aus. Die entstehenden neuen unabhängigen Teilbäume sind von den Typen  $S_3$  und  $S_n$ . (Man beachte, dass der neue  $n$ -Stern mit Sternpunkt  $v_0$  keine zusätzlichen stark unpassenden Kanten im Vergleich zum alten  $n$ -Stern  $B$  haben wird.)

■ ■ *Fall 2.B:  $l \geq 2$*

Falls eine gefärbte Kante an  $v_1$  hängt, so färbt Alice  $e_1$  verschieden von den Farben der (maximal 4) an  $v_0$  hängenden gefärbten Kanten. Der entstehende 3-Stern mit Sternpunkt  $v_1$  ist regulär, der andere neue unabhängige Teilbaum hat keine zusätzlichen stark unpassenden Kanten im Vergleich zu  $B$ , somit entstehen wieder Typ  $S_3$  und  $S_n$ .

Falls keine gefärbte Kante an  $v_1$  hängt, so färbt Alice  $e_l$  in einer der Farben der an  $v_0$  hängenden Kanten. (Eine solche Farbe existiert aufgrund der Regularität!) Dadurch kann keine zusätzliche stark unpassende Kante im neuen  $n$ -Stern mit Sternpunkt  $v_0$  entstehen (im Vergleich zu  $B$ ). Ferner wird der entstehende 3-Stern mit Sternpunkt  $v_1$  regulär, da die letzte Kante des kreisfreien Pfades von  $v_0$  nach  $v_1$  gefärbt wurde.

**B.** Nun bleibt das Lemma noch in dem Fall zu beweisen, dass das gerichtete Kantenfärbungsspiel (**GKant**) gespielt wird. Die Züge von Alice bleiben genau die gleichen wie beim ungerichteten Spiel. Natürlich entstehen dabei einerseits die gleichen erlaubten Typen  $S_m$  und  $U$  wie bei (**UKant**), aber manchmal auch andere unabhängige Teilbäume, nämlich solche, bei denen in Typ  $S_m$  oder  $U$  eine gefärbte Kante fehlt, nämlich die zuletzt von Alice gefärbte Kante. (Wenn die von Bob zuletzt gefärbte Kante in  $B'$  fehlt, so ist  $B'$  sicherlich erlaubt. In diesem Fall wird Alice auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum weiterspielen.)

Wann kann ein erlaubter Typ  $S_m$ , bei dem eine gefärbte Kante fehlt, nicht mehr erlaubt sein?

Einerseits kann dies der Fall sein, wenn diese Kante als einzige die Regularität sichergestellt hat und  $m \geq 4$  ist. Doch die einzige Gelegenheit, bei der

Alice die Regularität herstellen musste, war im Falle eines verbotenen 3-Sterns (*Fall 1.A*). Dort hat sie aber keinen Typ  $S_4$  erzeugt, sondern nur Typen  $S_3$  und  $S_2$ , bei denen das Fehlen einer Kante zu erlaubten Typen führt.

Andererseits können durch das Fehlen einer Kante in einem Typen  $S_m$  auf einmal stark unpassende Kanten vorhanden sein, die eigentlich durch das Färben der fehlenden Kante hätten eliminiert werden sollen. Bei derartigen Eliminationen hat aber Alice immer eine am Sternpunkt hängende Kante gefärbt, ihr Fehlen bedeutet, dass in dem neu entstehenden unabhängigen Teilbaum der Sternpunkt höchstens Grad 4 hat, und somit (2) erfüllt ist, d.h. der neue unabhängige Teilbaum ist vom erlaubten Typen  $S_{m-1}$ .

Wann kann ein erlaubter Typ  $U$ , bei dem eine gefärbte Kante fehlt, nicht mehr erlaubt sein? Trivialerweise niemals, er ist dann immer vom erlaubten Typen  $S_3$ .

Die vorstehenden Überlegungen zeigen die Gültigkeit des Lemmas auch beim gerichteten Kantenfärbungsspiel.  $\square$

Bei den folgenden Zerlegungslemmata wird immer die Zerlegung beim ungerichteten Kantenfärbungsspiel angegeben. (Mit der üblichen Konvention, dass evtl. vorkommende Typen  $S_1$  nicht zu existieren brauchen...) Wenn nichts weiter gesagt wird, so bewirken die gleichen Züge von Alice eine ähnliche Zerlegung in erlaubte Typen auch beim gerichteten Kantenfärbungsspiel. Nur in einigen Fällen muss aufgepasst werden, dort wird die geänderte Strategie ebenfalls beschrieben.

Lemma 31

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $U$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

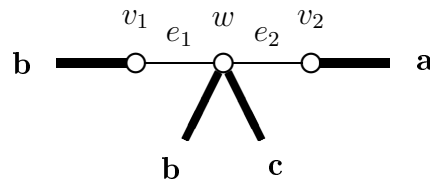


Abbildung 14: Struktur von Typ  $U$

### Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $U$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt etwa  $e_2$  zulässig. (Zerlegung:  $S_4, S_2$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice die jeweils andere Kante. (Zerlegung:  $S_2, S_4, S_2$ )

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_2$ -Ast färbt, so färbt Alice  $e_2$  zulässig. (Zerlegung:  $S_4, S_3, S_1$ )

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_1$ -Ast färbt, so antwortet Alice im allgemeinen durch Färben von  $e_1$  mit **a**. Dadurch wird die stark unpassende Kante eliminiert. (Zerlegung:  $S_1, S_3, S_4$ ) Nur in einem Fall ist diese Färbung von Alice nicht zulässig, nämlich dann, wenn Bob eine an  $v_1$  hängende Kante mit **a** gefärbt hat.

In dieser Situation färbt Alice  $e_1$  mit **d**, falls der Knotengrad von  $w$  nur 4 ist (Zerlegung  $S_1, S_3, S_4$ ); ansonsten die (dann existierende) an  $w$  hängende ungefärbte Kante, die verschieden von  $e_1$  und  $e_2$  ist, mit **a** (Zerlegung:  $S_1, Z, S_1$ ). BEIM GERICHTETEN SPIEL färbt Alice  $e_1$  mit **d**, falls der Knotengrad von  $w$  nur 4 ist (ähnliche Zerlegung wie eben), oder falls die (sonst existierende) an  $w$  hängende ungefärbte Kante  $\hat{e}$ , die verschieden von  $e_1$  und  $e_2$  ist,  $w$  als Anfangspunkt hat (Zerlegung  $S_1, S_2, V'_1$  oder  $S_1, S_3, S_3$  je nach Orientierung der Kante  $e_1$ ); ansonsten färbt Alice die Kante  $\hat{e}$ , die dann  $w$  als Endpunkt hat, mit **a** (Zerlegung:  $S_1, Z, S_1$ ).

Die letzte spezielle Situation zwingt uns zur Diskussion des weiteren Typen  $Z$  (und im gerichteten Fall noch zusätzlich des Typen  $V'_1$ ).

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass Bob eine Kante  $e$  in einem ungefärbten  $w$ -Ast färbt. Falls  $e$  an  $w$  hängt, so färbt Alice  $e_2$  zulässig und eliminiert damit die stark unpassende Kante. Falls  $e$  nicht an  $w$  hängt, so färbt Alice im allgemeinen die letzte Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $w$  mit **a**. Dies ist nur dann nicht zulässig möglich, wenn  $e$  Abstand 1 von  $w$  hat und selbst mit **a** gefärbt ist. In letzterer Situation färbt Alice  $e_1$  mit **a** und eliminiert so die beiden stark unpassenden Kanten. (Zerlegung in allen drei Unterfällen:  $S_1, S_5, S_2$ ) □

<b>Lemma 32</b>	Sei $B$ ein unabhängiger Teilbaum vom Typ $Z$ in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist $B$ *-zerlegbar.
-----------------	---

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $Z$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$  zulässig. (Zerlegung:  $S_3, S_5$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice die jeweils andere Kante. (Zerlegung:  $S_3, S_5, S_2$ )

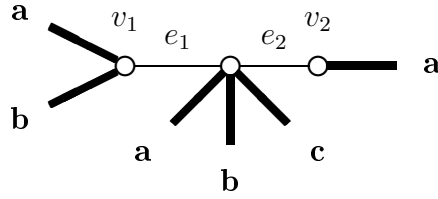


Abbildung 15: Struktur von Typ  $Z$

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_2$ -Ast färbt, so färbt Alice  $e_2$  zulässig. (Zerlegung:  $A, S_3, S_1$ ; im gerichteten Fall entsteht evtl. statt  $A$  auch  $A'$ )

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_1$ -Ast in der Farbe  $x$  färbt. Im allgemeinen kann Alice dann  $e_1$  (bevorzugt) mit  $x$  oder (sonst) mit  $d$  oder  $e$  zulässig färben, so dass der links entstehende 4-Stern im Falle des vollen Knotengrades 5 keine stark unpassende Kante hat. (Zerlegung:  $S_1, S_4, S_5$ ) Nur falls Bob eine Kante im Abstand 1 zu  $v_1$  mit  $c$  gefärbt hat und  $v_1$  vollen Grad 5 hat, entsteht bei obiger Vorgehensweise ein verbotener 4-Stern. Also färbt Alice hier die an  $v_1$  hängende ungefärbte Kante  $\hat{e}$  in dem (existierenden!) fünften, bislang ungefärbten  $v_1$ -Zweig mit  $c$ . (Zerlegung:  $S_1, S_1, W$ ) BEIM GERICHTETEN SPIEL verfährt Alice in der zuletzt diskutierten Spezialsituation wie folgt: Wenn  $\hat{e}$  den Knoten  $v_1$  als Anfangspunkt hat, dann färbt Alice  $e_1$  mit  $d$  (Zerlegung:  $S_1, V'_1, S_4$  oder  $S_1, S_3, S_5$ ); ansonsten färbt Alice  $\hat{e}$  mit  $c$  (Zerlegung:  $S_1, S_0, W$ ).  $\square$

Wir sind also zur Betrachtung der weiteren Typen  $A$  und  $W$  (sowie im gerichteten Fall von  $V'_1$  und  $A'$ ) gezwungen.

Lemma 33

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

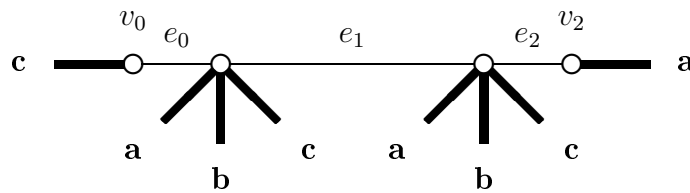


Abbildung 16: Struktur von Typ  $W$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $W$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$  mit  $d$ . (Zerlegung:  $S_5, S_5$ )



FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  färbt, so liegt obige Zerlegung vor und Alice hat es nicht nötig, zu reagieren.

Falls Bob  $e_0$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice  $e_1$ . (Zerlegung:  $S_2, S_5, S_5$ )

Ansonsten färbt Bob eine andere Kante, o.B.d.A. aufgrund der Symmetrie in einem ungefärbten  $v_0$ -Ast. Dann färbt Alice  $e_0$  zulässig. (Zerlegung:  $S_1, S_3, Y$ ; im gerichteten Fall entsteht evtl. auch  $Y'$  statt  $Y$ )  $\square$

Wir müssen also weiterhin Typ  $Y$  und im gerichteten Fall zusätzlich Typ  $Y'$  betrachten.

Lemma 34

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $Y$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

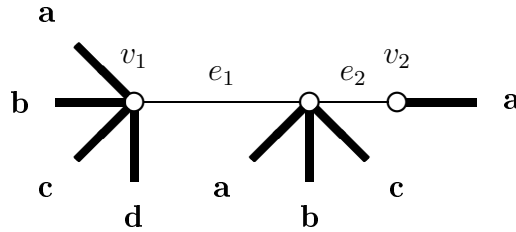


Abbildung 17: Struktur von Typ  $Y$

### Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $Y$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$  mit  $e$ . (Zerlegung:  $S_5, S_5$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice die jeweils andere Kante zulässig, dafür benötigt sie maximal eine sechste Farbe. (Zerlegung:  $S_5, S_5, S_2$ )

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_2$ -Ast färbt, so färbt Alice  $e_2$  zulässig. (Zerlegung:  $C, S_3, S_1$ ; im gerichteten Fall entsteht evtl. statt  $C$  auch  $C'$ )  $\square$

Wir müssen weiter die Zerlegung von Typ  $C$  und beim gerichteten Spiel zusätzlich von Typ  $C'$  untersuchen.

Lemma 35

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $A$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

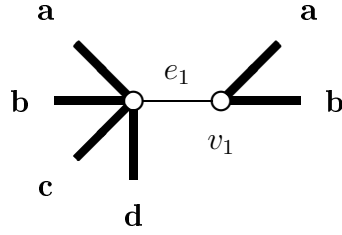


Abbildung 18: Struktur von Typ  $A$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $A$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$ . (Zerlegung:  $S_5, S_3$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  färbt, so liegt die gleiche Zerlegung in erlaubte Typen vor.

Falls Bob eine sonstige an  $v_1$  hängende Kante färbt, so färbt Alice  $e_1$  und benutzt höchstens eine sechste Farbe. (Zerlegung:  $S_5, S_4, S_1$ )

Falls Bob eine nicht an  $v_1$  hängende Kante  $e$  in einem ungefärbten  $v_1$ -Ast färbt, so färbt Alice die letzte Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $v_1$  in einer der Farben  $c$  oder  $d$ , aber verschieden von der Farbe von  $e$ . (Zerlegung:  $B, S_2, S_1$ ; beim gerichteten Spiel entsteht evtl. statt  $B$  auch wieder  $A$ )  $\square$

Somit sind wir zur Untersuchung von Typ  $B$  gezwungen.

Lemma 36

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

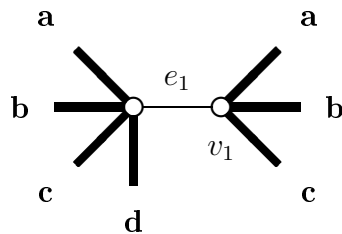


Abbildung 19: Struktur von Typ  $B$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der zugehörigen Abbildung von Typ  $B$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$ . (Zerlegung:  $S_5, S_4$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  färbt liegt bereits eine Zerlegung in erlaubte Typen vor wie oben.

Falls Bob eine Kante  $e$  in einem  $v_1$ -Ast färbt, so liegt entweder schon eine Zerlegung in erlaubte Typen  $C$  und  $S_1$  vor, oder Alice kann die letzte Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $v_1$  färben, so dass die Zerlegung  $C, S_2, S_1$  entsteht (beim gerichteten Spiel evtl.  $B$  statt  $C$ ).  $\square$

Nun bleibt noch Typ  $C$  zu behandeln, für das ungerichtete Spiel zumindestens.

Lemma 37

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $C$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

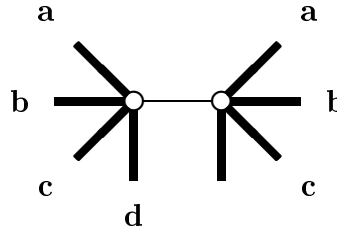


Abbildung 20: Struktur von Typ  $C$

**Beweis:**

Der Beweis ist trivial, da es nur eine einzige ungefärbte Kante in  $B$  gibt, die in einer sechsten Farbe gefärbt werden kann.  $\square$

Zusammengenommen beweisen die Lemmata dieses Abschnittes die erste Teilaussage von Theorem 29, und damit die erste Teilaussage von Theorem 25 im Fall  $\Delta = 5$ .

## 8.4 Zerlegung der beim gerichteten Spiel zusätzlich auftretenden erlaubten Typen

In diesem Unterabschnitt werden die sechs Typen  $V'_1, Y', A', B', C'$  und  $C''$  behandelt, die beim gerichteten Kantenfärbungsspiel auf Wäldern mit maximalem Knotengrad 5 ebenfalls erlaubt sind. Vier von ihnen können das

Ergebnis einer Zugfolge auf einem der bisher behandelten erlaubten Typen sein, Typ  $B'$  wird bei der Zerlegung von Typ  $A'$  auftreten, Typ  $C''$  bei der Zerlegung von Typ  $Y'$ .

Bei allen folgenden Lemmata erwähnen wir jeweils im Falle, dass Bob einen Zug auf dem jeweiligen unabhängigen Teilbaum ausführt, die Unterfälle der Zerlegungen nicht, in denen ein unabhängiger Teilbaum vom selben Typ und einer vom Typ  $S_1$  entsteht. In einem solchen Fall kann Alice auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum weiterspielen. Bei den entstehenden Zerlegungen muss man sowieso, wenn man genau ist, eine Fallunterscheidung bezüglich der Richtung der von Alice gefärbten Kante machen. Doch die Gewinnstrategie funktioniert bei beliebiger Orientierung der Kanten. Eine Ausnahme bildet nur die Zerlegung von Typ  $V'_1$ , in der die Richtung einer Kante vorgegeben ist.

Lemma 38

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $V'_1$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

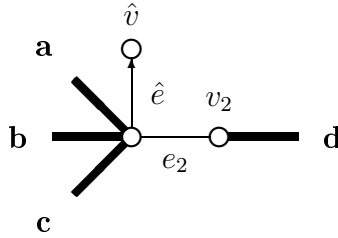


Abbildung 21: Struktur von Typ  $V'_1$

### Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $V'_1$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_2$  mit **e**. (Zerlegung:  $S_4$ ,  $S_1$  oder  $S_3$ ,  $S_2$  je nach Orientierung der gefärbten Kante)

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_2$  oder  $\hat{e}$  färbt, liegt schon eine Zerlegung in erlaubte Typen vor. Man beachte, dass bei Färbung von  $\hat{e}$  wegen der Richtung von  $\hat{e}$  niemals ein 5-Stern (mit einer stark unpassenden Kante) entsteht, sondern ein regulärer 4-Stern, dessen Sternpunkt Grad 4 hat, der also trotz stark unpassender Kante erlaubt ist.

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_2$ -Ast färbt, so antwortet Alice durch Färben der Kante  $e_2$ , eventuell in der sechsten Farbe. (Zerlegung:  $S_4$ ,  $S_2$ ,  $S_0$  oder  $S_3$ ,  $S_3$ ,  $S_0$ )

Falls Bob eine Kante in einem  $\hat{v}$ -Ast, der  $\hat{e}$  nicht enthält, färbt, so färbt Alice  $\hat{e}$  zulässig. (Zerlegung:  $S_0, S_2, S_4$ )  $\square$

**Lemma 39**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $Y'$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

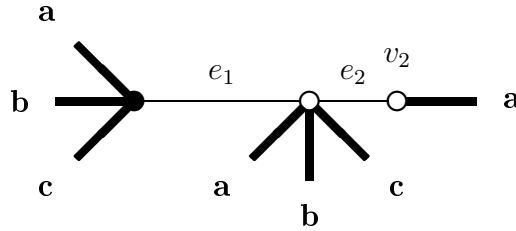


Abbildung 22: Struktur von Typ  $Y'$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $Y'$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt z.B.  $e_1$  mit **d**. (Zerlegung:  $S_4, S_4$  oder  $S_3, S_5$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice die jeweils andere Kante. (Zerlegung:  $S_4/S_3, S_5/S_4/S_3, S_2/S_1$ )

Falls Bob eine Kante in einem ungefärbten  $v_2$ -Ast färbt, so färbt Alice  $e_2$ . (Zerlegung:  $C', S_2, S_0$  oder  $C'', S_3, S_0$ )  $\square$

**Lemma 40**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $A'$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $A'$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$ . (Zerlegung:  $S_4, S_2$  oder  $S_3, S_3$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob eine an  $v_1$  hängende Kante färbt, so liegt eine Zerlegung in erlaubte Typen bereits vor.

Nichttrivial ist der Fall, dass Bob eine Kante  $e$  in einem ungefärbten  $v_1$ -Ast färbt, die nicht an  $v_1$  hängt. Dann färbt Alice die letzte Kante auf dem Pfad

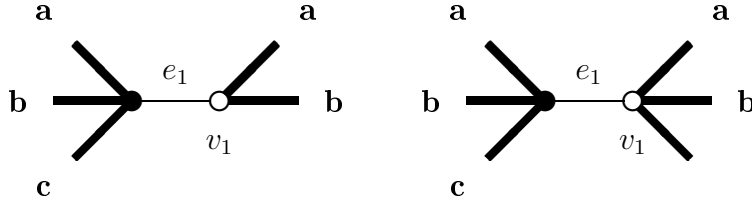


Abbildung 23: Struktur von Typ  $A'$  (links) und  $B'$  (rechts)

von  $e$  nach  $v_1$ . (Zerlegung:  $B'$ ,  $S_1$ ,  $S_0$  oder  $A'$ ,  $S_2$ ,  $S_0$ ) □

**Lemma 41**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B'$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Der Beweis geht vollkommen analog zur Zerlegung von Typ  $A'$ , nur dass statt Typ  $B'$  Typ  $C'$  entsteht (und statt Typ  $A'$  Typ  $B'$ ). □

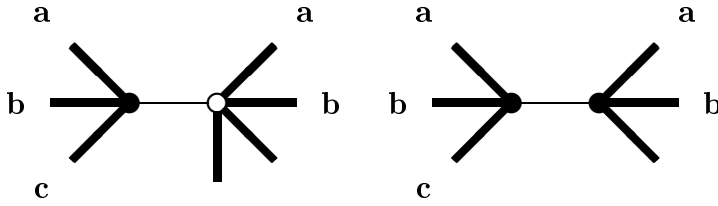


Abbildung 24: Struktur von Typ  $C'$  (links) und  $C''$  (rechts)

Trivial sind die folgenden beiden Lemmata:

**Lemma 42**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $C'$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Lemma 43**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $C''$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

Zusammengenommen beweisen die Lemmata der beiden letzten Abschnitte die zweite Teilaussage von Theorem 29, und damit die zweite Teilaussage von Theorem 25 im Fall  $\Delta = 5$ .

## 9 Kantenfärbungsspiele auf Wäldern mit $\Delta = 3$

In diesem Abschnitt der Arbeit wird Theorem 25 im Fall  $\Delta = 3$  bewiesen. Vorarbeiten hierzu lieferten Cai und Zhu [4] sowie He, Hou, Mi, Shao und Wang [12].

Dieser Fall unterscheidet sich in seiner Komplexität deutlich von den Fällen  $\Delta \geq 6$  und  $\Delta = 5$ . In jenen Fällen beruhten die Beweise darauf, stark unpassende Kanten in den auftretenden  $\Delta$ -Sternen gänzlich zu verbieten, wodurch sich die  $(\Delta + 1)$ -Sternschnuppenzerlegungen sehr einfach gestalteten. So einfach vielleicht, dass man sich beim Lesen gar nicht bewusst wurde, dass die Zerlegung von  $(\Delta + 1)$ -Sternschnuppen das eigentliche Problem für Alice darstellt.

Im Fall  $\Delta = 3$  ist es dagegen unmöglich, stark unpassende Kanten für 3-Sterne zu verbieten und wie in den Fällen  $\Delta = 5$  und  $\Delta \geq 6$  vorzugehen. Der wesentliche Grund dafür ist, dass bei der üblichen Zerlegung von  $(\Delta + 1)$ -Sternschnuppen relativ beliebige reguläre 3-Sterne nach dem Zug von Alice entstehen können, insbesondere solche mit 2 stark unpassenden Kanten (z.B. der Spezialfall des in 9.2 definierten verbotenen Typen  $T_{11}$  mit  $m = n = 1$ , auf dem Bob sehr schnell gewinnen kann). Man beachte, dass im Fall  $\Delta = 3$  jeder unabhängige Teilbaum mit 4 gefärbten Kanten eine 4-Sternschnuppe ist.

Nichtsdestotrotz ist Theorem 25 auch im Fall  $\Delta = 3$  richtig. Zum Beweis der Gewinnstrategie von Alice mit 4 Farben muss aber die 4-Sternschnuppenzerlegung „per Hand“ vorgenommen werden, d.h. mittels eines kombinatorischen Beweises mit ungefähr 46 Fallunterscheidungen (Fall II im Beweis von Lemma 50). Die Produkte dieser Zerlegung sind oftmals keine Sterne mehr, es entsteht vielmehr eine Vielzahl von Typen mit 4 oder mehr gefärbten Kanten, deren Zerlegung wiederum in den meisten Fällen nicht trivial ist.

Ein Grund dafür, dass es eine solche Gewinnstrategie für Alice gibt, liegt darin, dass kein 3-Stern existiert, auf dem Bob eine Gewinnstrategie mit 4 Farben besitzt (vgl. Lemma 47). Zwar sind nach dem Zug von Alice manche 3-Sterne verboten, doch nach Bobs Zug darf jeder 3-Stern auftreten. In allen Fällen  $\Delta \geq 4$  gibt es dagegen  $\Delta$ -Sterne, die nicht einmal nach Bobs Zug auftreten dürfen.

## 9.1 Verschärfung von Satz 24

Theorem 25 lautet im Fall  $\Delta = 3$ :

**Theorem 44**

Sei  $G = (V, E)$  ein gerichteter Wald mit maximalem Knoten-grad  $\Delta(G) \leq 3$ . Dann gilt:

$$i_{[B,B]}(G) \leq 4 \quad \text{und} \quad \vec{i}_{[B,B]}(G) \leq 4$$

Genauer wird gezeigt, dass Alice eine Gewinnstrategie mit 4 Farben hat, und zwar sowohl für alle Spiele der Arten **(UKant)** als auch für alle Spiele der Arten **(GKant)**.

### Beweis des Theorems:

Sei  $G = (V, E)$  ein Wald mit  $\Delta(G) \leq 3$  und die Farbmenge  $\{1, 2, 3, 4\}$  vorgegeben.

Die Strategie von Alice erhält als Invariante, dass vor jedem Zug von Bob, also nach jedem Zug von Alice, jeder vorkommende unabhängige Teilbaum von einem der in 9.3 oder 9.4 definierten erlaubten Typen ist. Genauer sind bei der Strategie beim ungerichteten Kantenfärbungsspiel nur die 24 in 9.3 definierten erlaubten Typen zugelassen, beim gerichteten Kantenfärbungsspiel dagegen alle 30 erlaubten Typen.

Zu Beginn des Spiel sind alle unabhängigen Teilbäume vom Typ  $L$ .

Somit genügt es gemäß der allgemeinen Vorgehensweise von 6.4, für den Beweis der Behauptung die \*-Zerlegbarkeit jedes einzelnen Typen zu zeigen. Dies ist Inhalt von 9.5 für die ersten 24 Typen. In 9.6 werden die 6 weiteren Typen behandelt.

Bei den Zerlegungen in 9.5 wird der Beweis für das ungerichtete Spiel aufgeschrieben. Alle angegebenen Zerlegungen beziehen sich immer auf das ungerichtete Spiel. Es bleibt dem Leser überlassen, in jedem Einzelfall zu überprüfen, dass der gleiche Zug auch beim ungerichteten Spiel zu einer Zerlegung in erlaubte Typen führt. Allerdings gibt es einige wenige Stellen, an denen beim gerichteten Spiel anders verfahren werden muss. An diesen Stellen ist dies selbstverständlich vermerkt.

Man kann sich aber auch durch eine grundsätzliche Überlegung klarmachen, dass die beim gerichteten Spiel in den Zerlegungen der ersten 24 Typen entstehenden unabhängigen Teilbäume erlaubt sind. Liegt solch ein Typ vor und färbt Bob eventuell eine Kante und dann Alice eine Kante, so liegt beim gerichteten Spiel die gleiche Zerlegung in ein, zwei oder drei unabhängige Teilbäume wie beim ungerichteten Spiel vor, nur dass in jedem unabhängigen Teilbaum eventuell ein oder zwei gefärbte Kanten fehlen können. Ist nun



der Beweis für das ungerichtete Spiel erbracht, so können wir annehmen, dass nach den Zügen von Alice nur erlaubte Typen vorliegen, also beim gerichteten Spiel nur erlaubte Typen, in denen eventuell bis zu 2 gefärbte Kanten fehlen.

Wenn man nun zeigen könnte, dass erlaubte Typen, bei denen bis zu 2 Kanten fehlen, ebenfalls erlaubt wären, würde der Beweis im gerichteten Fall aus dem Beweis im ungerichteten Fall folgen. Dazu betrachte man die erlaubten Typen des gerichteten Falles, wie in 9.3 definiert. Sie zerfallen in drei Klassen:

- (1)  $T_\gamma^{(1)}, T_\gamma^{(2)}, A, C_\gamma, C, L, I, Z, X, T, M, N, V_\nu, Y_\nu$
- (2)  $D, O_{\mu\nu}$
- (3)  $H, G, B, P, W_\gamma, E, W, R$

Typen aus (1), bei denen bis zu zwei gefärbte Kanten fehlen, sind von einem der beim ungerichteten Spiel erlaubten Typen. Typen aus (2), bei denen bis zu zwei Kanten fehlen, sind entweder von einem beim ungerichteten Spiel erlaubten oder einem beim gerichteten Spiel zusätzlich erlaubten Typen. Diese beiden Sorten von Typen machen also keine Schwierigkeiten, nur die Klasse (3), in denen jene Typen sind, bei denen das Entfernen von manchen gefärbten Kanten zu verbotenen Typen führt.

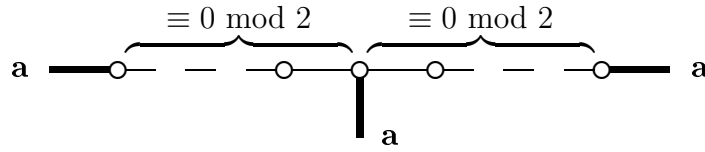
Wenn daher bei der Zerlegung eines erlaubten Typen ein Typ aus Klasse (3) entsteht, so wird an dieser Stelle des entsprechenden Zerlegungslemmas immer eine Bemerkung angebracht, was dort beim gerichteten Spiel passiert, bzw. gegebenenfalls, wie die Strategie für das gerichtete Spiel abgeändert werden muss.

Die vorstehenden Überlegungen, zusammen mit den Zerlegungslemmata, zeigen die Richtigkeit der Behauptung, nicht nur beim ungerichteten Spiel, sondern auch beim gerichteten. □

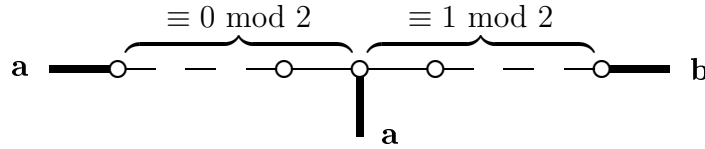
In den folgenden drei Unterabschnitten werden zunächst einige verbotene Typen, dann die bei (**UKant**) und (**GKant**) erlaubten Typen und schlussendlich die bei (**GKant**) noch zusätzlich erlaubten Typen definiert. Dabei wird jeder Typ verbal beschrieben, unmittelbar unter dieser Beschreibung findet sich eine schematische Abbildung des Typen. Zur Erklärung der Zeichnungen vergleiche man 6.8. Hier hat ein Knoten, der durch einen schwarzen Kreis dargestellt wird, genauen Knotengrad 2.

## 9.2 Spezielle verbotene Typen

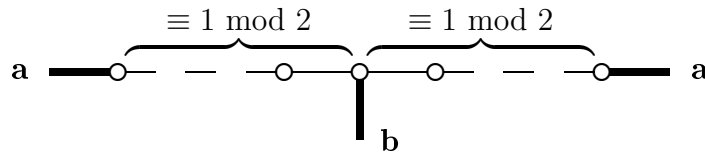
**T<sub>00</sub>**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_{00}$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m, n \equiv 0 \pmod{2}$ ). An den Knoten  $v_{-m}$ ,  $v_0$  und  $v_n$  hängt jeweils eine mit **a** gefärbte Kante, an den Knoten  $v_{-i}, v_j$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $e_k$  enthält.



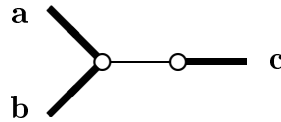
**T<sub>01</sub>**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_{01}$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m \equiv 0 \pmod{2}$  und  $n \equiv 1 \pmod{2}$ ). An den Knoten  $v_{-m}$  und  $v_0$  hängt jeweils eine mit **a** gefärbte Kante, am Knoten  $v_n$  eine mit **b** gefärbte Kante. An den Knoten  $v_{-i}, v_j$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) hängt jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $e_k$  enthält.



**T<sub>11</sub>**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_{11}$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n$  ( $m, n \in \mathbb{N}$  und  $m, n \equiv 1 \pmod{2}$ ). An den Knoten  $v_{-m}$  und  $v_n$  hängt jeweils eine mit **a** gefärbte Kante, am Knoten  $v_0$  eine mit **b** gefärbte Kante. An den Knoten  $v_{-i}, v_j$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) hängt jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $e_k$  enthält.



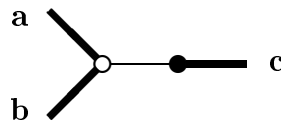
**T<sub>1</sub>:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_1$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_0ev_1$ . Am Knoten  $v_0$  hängen zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, am Knoten  $v_1$  eine mit **c** gefärbte Kante sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum.



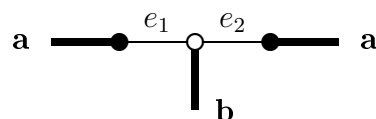
## 9.3 Die erlaubten Typen

### 9.3.1 Typen von beschränkter Größe

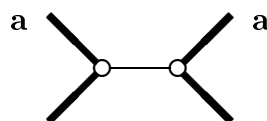
**T<sub>γ</sub><sup>(1)</sup>:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_\gamma^{(1)}$  besteht aus genau vier Kanten, von denen drei in den Farben **a**, **b** und **c** gefärbt sind, und die durch eine vierte, ungefärbte Kante  $e$  zusammengehalten werden. *Man beachte, dass ein Knoten in diesem Baum nur Knotengrad 2 hat!*



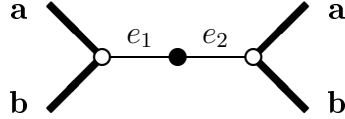
**T<sub>γ</sub><sup>(2)</sup>:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T_\gamma^{(2)}$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_1e_1v_2e_2v_3$ . An den Knoten  $v_1$  und  $v_3$  hängt jeweils eine in **a** gefärbte Kante, an  $v_2$  eine in **b** gefärbte. Außer den erwähnten Kanten gebe es keine weiteren. *Hier haben also zwei Knoten nur Knotengrad 2!*



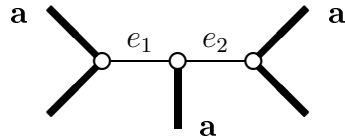
**A:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $A$  wird zusammengehalten durch einen trivialen tragenden Pfad  $vew$ . An den beiden Knoten hängen jeweils zwei gefärbte Kanten, von denen jeweils eine mit **a** gefärbt ist. *Dieser Typ kommt schon in [12] vor.*



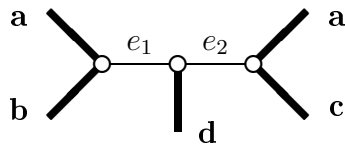
**C<sub>γ</sub>**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $C_\gamma$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_1e_1v_0e_2v_2$ . An den äußeren Knoten  $v_1$  und  $v_2$  hängen jeweils zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, der mittlere Knoten  $v_0$  habe nur Knotengrad 2.



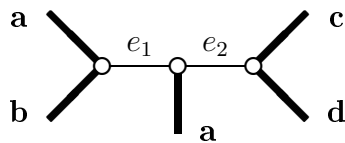
**C**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $C$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_1e_1v_0e_2v_2$ . An den äußeren Knoten  $v_1$  und  $v_2$  hängen jeweils zwei gefärbte Kanten, von denen jeweils eine mit **a** gefärbt ist, am Mittelknoten  $v_0$  hängt eine ebenfalls mit **a** gefärbte Kante. *Dieser Typ kommt schon in [12] vor.*



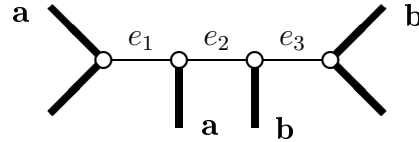
**H**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $H$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_1e_1v_0e_2v_2$ . An  $v_1$  hängen zwei mit **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_2$  zwei mit **a** und **c** gefärbte. Am Mittelknoten  $v_0$  hängt eine mit **d** gefärbte Kante.



**G**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $G$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_1e_1v_0e_2v_2$ . An  $v_1$  hängen zwei mit **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_2$  zwei mit **c** und **d** gefärbte. Am Mittelknoten  $v_0$  hängt ebenfalls eine gefärbte Kante.

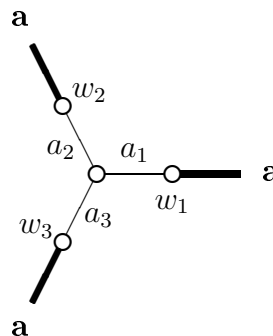


- B:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3$ . An den äußeren Knoten  $v_0$  und  $v_3$  hängen jeweils zwei zulässig gefärbte Kanten, an den inneren Knoten  $v_1$  und  $v_2$  jeweils eine. Dabei seien eine an  $v_0$  hängende und die an  $v_1$  hängende Kante mit **a** gefärbt, eine an  $v_3$  hängende und die an  $v_2$  hängende mit **b**. Dieser Typ kommt schon in [12] vor.



### 9.3.2 Unbeschränkte Typen mit 0, 1, 2 oder 3 gefärbten Kanten

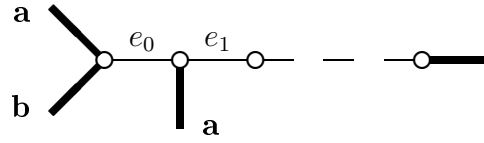
- L:** Einen ungefärbten Baum, wie er in der Situation am Anfang des Spieles vorkommt, nennen wir vom Typ  $L$ . Ein trivialer Spezialfall dieses Typs ist ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $L_0$ , der keine Kante enthält.
- I:** Ein unabhängiger Teilbaum mit genau einer gefärbten Kante heißt vom Typ  $I$ . Der triviale Spezialfall, bei dem es sonst keine weitere Kante gibt, heißt vom Typ  $I_0$ .
- Z:** Ein unabhängiger Teilbaum mit genau zwei gefärbten Kanten heißt vom Typ  $Z$ . Wieder bezeichnen wir den Spezialfall, bei dem er sonst keine weiteren Kanten hat, als Typ  $Z_0$ .
- X:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $X$  ist ein einfacher 3-Stern, bei dem im Zentrum ein Knoten  $v$  sitzt, an dem drei ungefärbte Kanten  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  hängen. Die von  $v$  verschiedenen Endpunkte dieser Kanten seien die Knoten  $w_1$ ,  $w_2$  und  $w_3$ . An  $w_1$  (bzw.  $w_2$ ,  $w_3$ ) hänge jeweils eine in der Farbe **a** gefärbte Kante sowie jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  enthält.



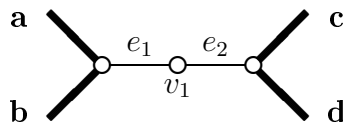
**T:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T$  hat genau drei gefärbte Kanten, von denen mindestens eine am Sternpunkt hängt. Zusätzlich soll gelten, dass dieser Teilbaum **nicht** von einem der verbotenen Typen  $T_1, T_{00}, T_{01}$  oder  $T_{11}$  ist. Den Spezialfall, in dem alle drei gefärbten Kanten an dem gleichen Knoten hängen, bezeichnen wir als Typen  $T_0$ . Zur Übersicht sämtlicher Untertypen siehe Abbildung 25 auf Seite 94.

### 9.3.3 Unbeschränkte Typen mit 4 gefärbten Kanten

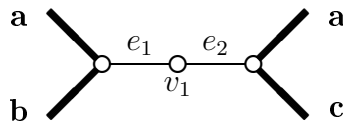
**D:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $D$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_{-1}e_0v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ . Am Knoten  $v_{-1}$  hängen zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_0$  eine mit **a** gefärbte sowie an  $v_n$  eine vierte, beliebig gefärbte Kante. An  $v_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) hängt jeweils eventuell noch ein ungefärbter Teilbaum, der keine der  $e_j$  enthält. *Dieser Typ kommt schon in [12] vor, wird dort allerdings  $D_1$  genannt.*



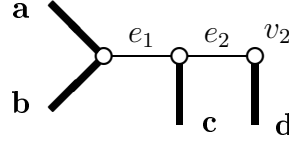
**M:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $M$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2$ . An  $v_0$  und  $v_2$  hängen jeweils zwei gefärbte Kanten. Jede der vier Farben komme genau einmal unter den Farben dieser Kanten vor. An  $v_1$  darf eventuell ein ungefärbter Teilbaum hängen, der keine der Kanten  $e_1$  und  $e_2$  enthält.



**N:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $N$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2$ . An  $v_0$  hängen zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_2$  zwei mit **a** und **c** gefärbte Kanten. An  $v_1$  darf eventuell ein ungefärbter Teilbaum hängen, der keine der Kanten  $e_1$  und  $e_2$  enthält.



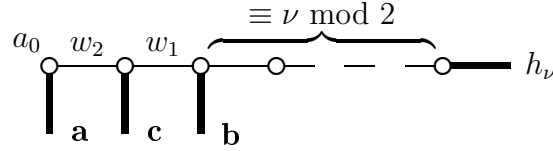
**P:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $P$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2$ . An  $v_0$  hängen zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_1$  eine mit **c** gefärbte und an  $v_2$  eine mit **d** gefärbte Kante sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der  $e_2$  nicht enthält.



**V<sub>ν</sub>:** Sei  $h_1 := \mathbf{b}$  und  $h_0 := \mathbf{c}$ . Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $V_\nu$  ( $\nu \in \{0, 1\}$ ) wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad

$$a_0w_2c_0w_1b_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n,$$

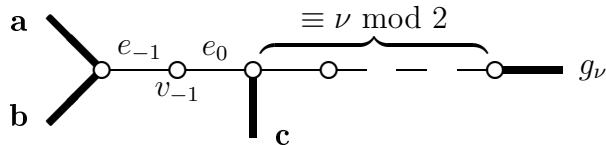
wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \equiv \nu \pmod{2}$ . An  $a_0$  hängt eine mit **a**, an  $c_0$  eine mit **c**, an  $b_0$  eine mit **b** und an  $v_n$  eine mit  $h_\nu$  gefärbte Kante. An den Knoten  $v_i$  hängt jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $e_j$  enthält.



**Y<sub>ν</sub>:** Sei  $g_1 := \mathbf{c}$  und  $g_0 := \mathbf{d}$ . Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $Y_\nu$  ( $\nu \in \{0, 1\}$ ) wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad

$$v_{-2}e_{-1}v_{-1}e_0v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n,$$

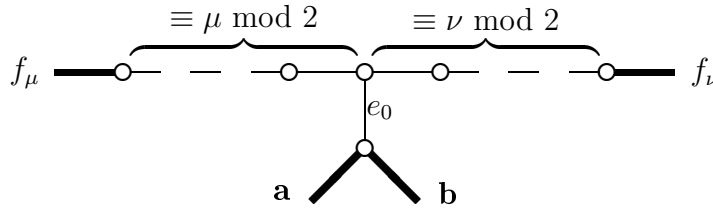
wobei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \equiv \nu \pmod{2}$ . An  $v_{-2}$  hängen zwei in den Farben **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_0$  eine mit **c** und an  $v_n$  eine mit  $g_\nu$  gefärbte. An den Knoten  $v_i$  ( $i \in \{-1\} \cup \{1, 2, \dots, n\}$ ) hängt jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der keine der Kanten  $e_j$  enthält.



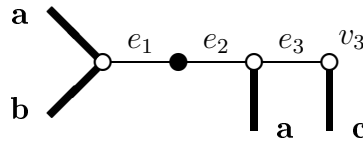
$O_{\mu\nu}$ : Sei  $f_1 := \mathbf{a}$  und  $f_0 := \mathbf{b}$ . Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $O_{\mu\nu}$  ( $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ ) wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad

$$v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n,$$

wobei  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \equiv \mu \bmod 2$  und  $n \equiv \nu \bmod 2$ . An dem einen Endknoten  $v_{-m}$  des Pfades hängt eine mit  $f_\mu$  gefärbte Kante, an  $v_n$ , dem anderen, hängt eine mit  $f_\nu$  gefärbte. Am Mittelknoten  $v_0$  hängt eine von  $e_{-1}$  und  $e_1$  verschiedene Kante  $e_0$ , die wiederum zu zwei in den Farben  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gefärbten Kanten adjazent ist. An den Knoten  $v_i$  ( $i \neq 0$ ) darf jeweils noch ein ungefärbter Teilbaum hängen, der keine der Kanten  $e_j$  enthält. *Der einfachste Spezialfall dieses Typs mit  $m = n = 1$  kommt schon in [12] vor.*

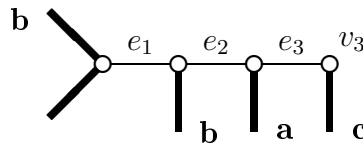


$W_\gamma$ : Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W_\gamma$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$ . An  $v_0$  hängen zwei mit  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gefärbte Kanten,  $v_1$  habe nur Knotengrad 2, an  $v_2$  hängt eine mit  $\mathbf{a}$  gefärbte Kante und an  $v_3$  eine mit  $\mathbf{c}$  gefärbte sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der die Kante  $e_3$  nicht enthält.



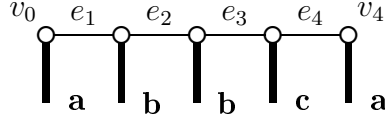
#### 9.3.4 Unbeschränkte Typen mit 5 oder 7 gefärbten Kanten

**E**: Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $E$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$ . An  $v_0$  hängen zwei gefärbte Kanten, von denen eine mit  $\mathbf{b}$  gefärbt ist, an  $v_1$  eine mit  $\mathbf{b}$ , an  $v_2$  eine mit  $\mathbf{a}$  und an  $v_3$  eine mit  $\mathbf{c}$  gefärbte Kante sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der  $e_3$  nicht enthält. *Dieser Typ kommt schon in [12] vor.*

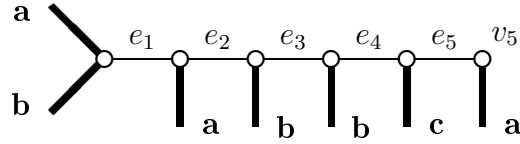




**W:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4$ . An  $v_1$  und  $v_2$  hängt jeweils eine mit **b** gefärbte Kante, an  $v_3$  eine mit **c** gefärbte, und an  $v_0$  und  $v_4$  jeweils eine mit **a** gefärbte Kante sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der  $e_1$  und  $e_4$  nicht enthält.



**R:** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $R$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5$ . An  $v_0$  hängen zwei mit **a** und **b** gefärbte Kanten, an  $v_1$  eine mit **a**, an  $v_2$  und  $v_3$  jeweils eine mit **b**, an  $v_4$  eine mit **c** und an  $v_5$  eine mit **a** gefärbte Kante sowie eventuell ein ungefärbter Teilbaum, der  $e_5$  nicht enthält.



$(x, y, z)$	$m \equiv 0, n \equiv 0$	$m \equiv 0, n \equiv 1$	$m \equiv 1, n \equiv 1$
<b>(a,a,a)</b>	verboten	erlaubt	erlaubt
<b>(a,a,b)</b>	erlaubt	verboten	erlaubt
<b>(a,b,a)</b>	erlaubt	erlaubt	verboten
<b>(b,a,a)</b>	erlaubt	erlaubt	erlaubt
<b>(a,b,c)</b>	erlaubt	erlaubt	erlaubt

Tabelle 1: Erlaubte und verbotene reguläre 3-Sterne

Die richtigen Einschränkungen für die Typen mit genau 3 gefärbten Kanten zu finden, stellt eine der wesentlichen Aufgaben beim Beweis von Theorem 44 dar. Wir haben sie dadurch gelöst, dass wir außer den einfacheren Typen  $T_\gamma^{(1)}$ ,  $T_\gamma^{(2)}$  und  $X$  nur den (recht umfangreichen) Typ  $T$  erlauben. Zur Veranschaulichung, welche unabhängigen Teilbäume vom Typ  $T$  sind, diene folgende Bemerkung:

Sei  $K$  ein unabhängiger Teilbaum mit genau 3 gefärbten Kanten gegeben. Wenn genau 3 gefärbte Kanten am Sternpunkt hängen, dann liegt der Untertyp  $T_0$  vor. Wenn genau 2 gefärbte Kanten am Sternpunkt hängen, dann ist  $K$  immer erlaubt, außer in dem einzigen Fall, in dem es sich um den verbotenen Typen  $T_1$  handelt. Wenn genau eine gefärbte Kante am Sternpunkt hängt, dann enthält  $K$  einen tragenden Pfad

$$v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n,$$

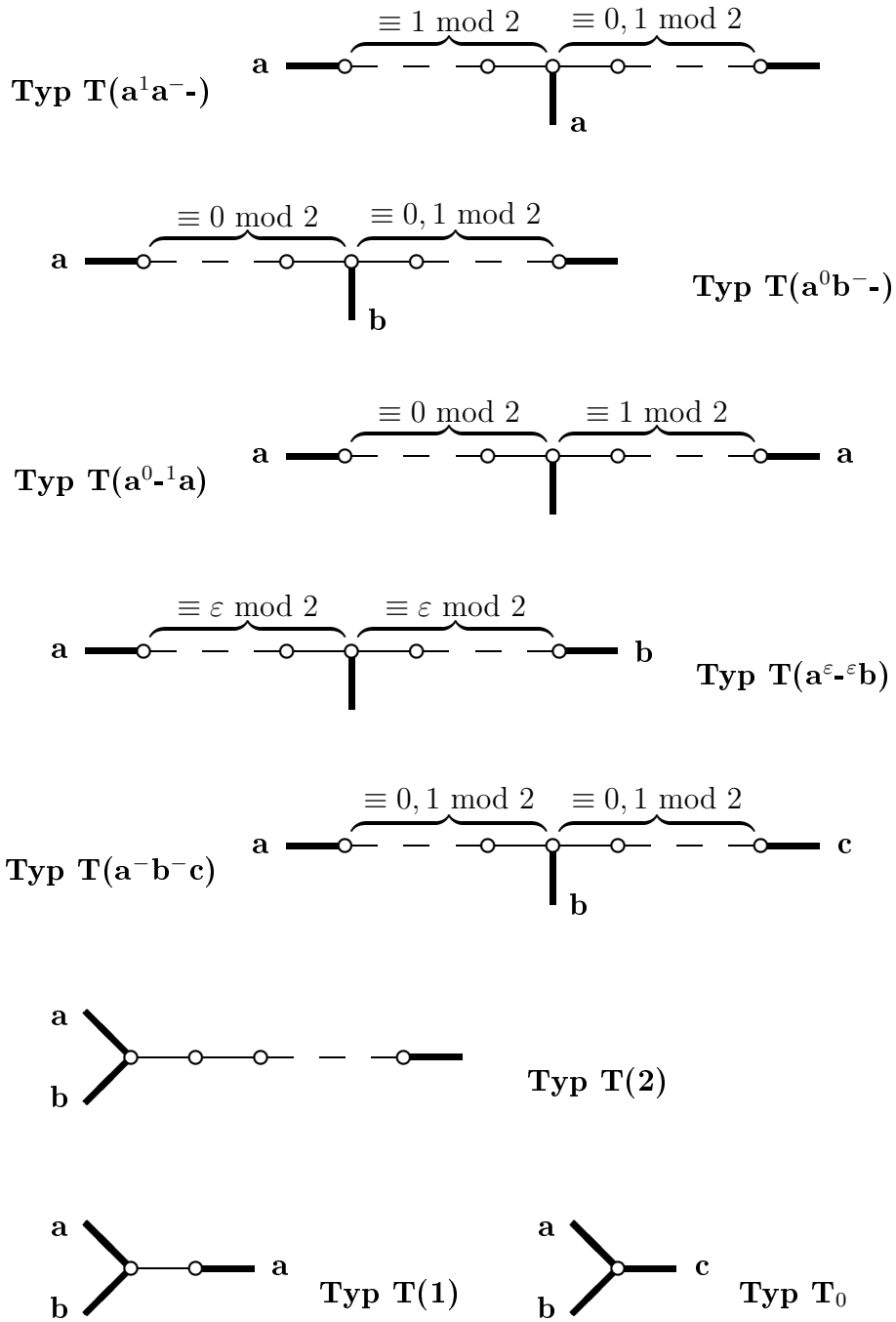


Abbildung 25: Die erlaubten Untertypen von Typ  $T$ . Man beachte, dass die Schnittmengen zweier Untertypen nicht unbedingt leer sein müssen.

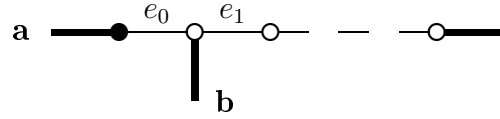
wobei  $m, n \in \mathbb{N}$ . Am Knoten  $v_{-m}$  hängt eine mit Farbe  $x$  gefärbte Kante, am Knoten  $v_0$  eine mit  $y$  und an  $v_n$  eine mit  $z$  gefärbte Kante, dabei brauchen  $x, y, z$  nicht paarweise verschieden zu sein. Die Tabelle 1 gibt darüber Aufschluss, welche der möglichen Fälle (in Bezug auf die Farben  $x, y, z$  und die Teilpfadlängen  $m, n$ ) erlaubt (d.h. vom Typ  $T$ ) bzw. verboten sind. Die Kongruenzen verstehen sich immer modulo 2.

Wem Bilder mehr sagen, der schaue sich die Übersicht in Abbildung 25 an, dort sind alle möglichen Untertypen von Typ  $T$  aufgelistet.

## 9.4 Zusätzliche erlaubte Typen

Die in diesem Abschnitt definierten erlaubten Typen werden für die Gewinnstrategie von Alice nur beim gerichteten Kantenfärbungsspiel benötigt.

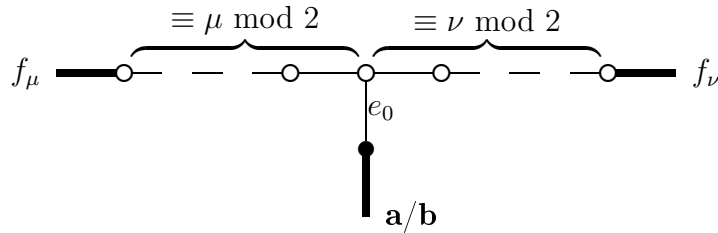
**$T^g$ :** Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T^g$  wird zusammengehalten vom tragenden Pfad  $v_{-1}e_0v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ . An  $v_{-1}$  hänge eine mit **a**, an  $v_0$  eine mit **b** gefärbte und an  $v_n$  hänge eine beliebig gefärbte Kante. Der Knoten  $v_{-1}$  habe nur Knotengrad 2, an den Knoten  $v_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) dürfen ungefärbte Teilbäume hängen.



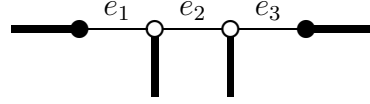
**$O_{\mu\nu}^g$ :** Sei  $f_1 := \mathbf{a}$  und  $f_0 := \mathbf{b}$ . Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $O_{\mu\nu}^g$  ( $\mu, \nu \in \{0, 1\}$ ) wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad

$$v_{-m}e_{-m}\dots v_{-2}e_{-2}v_{-1}e_{-1}v_0e_1v_1e_2v_2\dots e_nv_n,$$

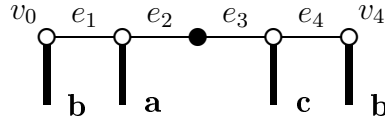
wobei  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \equiv \mu \pmod{2}$  und  $n \equiv \nu \pmod{2}$ . An  $v_{-m}$  hängt eine mit  $f_\mu$ , an  $v_n$  eine mit  $f_\nu$  gefärbte Kante. An  $v_0$  hängt eine ungefärbte Kante  $e_0$ , an der wiederum eine mit **a** oder **b** gefärbte Kante hängt, aber außer  $e_{-1}$  und  $e_1$  keine weitere ungefärbte Kante, so dass ein Knoten nur Grad 2 hat. An den Knoten  $v_{-i}, v_j$  ( $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) dürfen ungefärbte Teilbäume hängen.



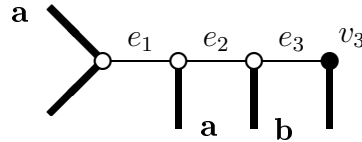
$\mathbf{B}_\gamma^g$ : Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B_\gamma^g$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$ . An jedem Knoten  $v_i$  hängt eine gefärbte Kante.  $v_0$  und  $v_3$  haben nur Knotengrad 2.



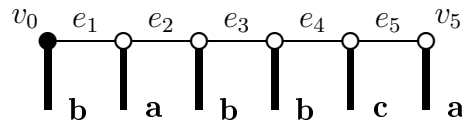
$\mathbf{W}^g$ : Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W^g$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4$ . An  $v_0$  und  $v_4$  hängt jeweils eine mit **b** gefärbte Kante, an  $v_1$  eine mit **a** und an  $v_3$  eine mit **c** gefärbte. Der mittlere Knoten  $v_2$  habe nur Grad 2. An  $v_0$  bzw.  $v_4$  darf jeweils eventuell ein ungefärbter Teilbaum hängen.



$\mathbf{B}^g$ : Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B^g$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3$ . An  $v_0$  hängen zwei gefärbte Kanten, eine davon mit **a**, an  $v_1$  eine mit **a**, an  $v_2$  eine mit **b** und an  $v_3$  eine beliebig gefärbte Kante. Der Knoten  $v_3$  habe nur Grad 2.



$\mathbf{R}^g$ : Ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $R^g$  wird zusammengehalten von einem tragenden Pfad  $v_0e_1v_1e_2v_2e_3v_3e_4v_4e_5v_5$ . An jedem der Knoten  $v_i$  hängt eine gefärbte Kante; die Färbungen sind bei  $v_0$ : **b**, bei  $v_1$ : **a**, bei  $v_2$ : **b**, bei  $v_3$ : **b**, bei  $v_4$ : **c** und bei  $v_5$ : **a**.  $v_0$  habe nur Knotengrad 2, an  $v_5$  darf ein ungefärbter Teilbaum hängen.



## 9.5 Zerlegung der erlaubten Typen

In diesem Unterabschnitt werden wir die Beweise erbringen, die, verbunden mit der Idee des Unterabschnitts 9.1, zeigen, dass Alice eine Gewinnstrategie für das ungerichtete Kantenfärbungsspiel auf Bäumen mit maximalem Knotengrad 3 bei 4 Farben besitzt.

Da im wesentlichen die gleiche Gewinnstrategie auch beim gerichteten Kantenfärbungsspiel funktioniert, werden wir, wie schon erwähnt, an den Stellen in den Beweisen, an denen man beim gerichteten Spiel aufpassen muss, Bemerkungen anbringen.

Wir werden uns die Zerlegungsmöglichkeit der einzelnen Typen unabhängiger Teilbäume in der Reihenfolge vornehmen, wie wir die Typen definiert haben.

Zum Verständnis der folgenden Beweise sei angemerkt, dass wir uns immer auf die Farben **a**, **b**, **c** und **d** beziehen, so wie sie in der Definition der Typen vorkommen, ebenso auf die Bezeichnungen der Knoten und Kanten. Ferner treffen wir die Konvention, dass eventuell in einer Zerlegung erwähnte Typen  $I$  nicht unbedingt zu existieren brauchen.

Lemma 45

Auf einem unabhängigen Teilbaum von einem der Typen  $A$ ,  $C$ ,  $H$ ,  $G$ ,  $C_\gamma$ ,  $T_\gamma^{(1)}$  und  $T_\gamma^{(2)}$  kann immer eine Kante zulässig gefärbt werden. Nach dem Zug sind die beiden dadurch entstandenen unabhängigen Teilbäume von erlaubten Typen.

**Beweis:**

Dies ist offensichtlich. Die Typen, die dabei entstehen können, sind  $Z_0$ ,  $T_0$ ,  $T_\gamma^{(1)}$  und  $A$ . □

Lemma 46

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

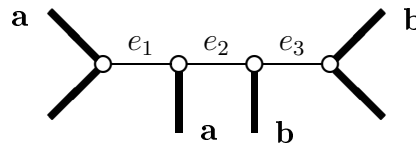


Abbildung 26: Struktur von Typ  $B$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $B$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt die mittlere Kante  $e_2$  zulässig. Es entstehen zwei unabhängige Teilbäume vom Typ  $A$ . Tatsächlich darf Alice keine der beiden anderen Kanten färben, sonst würde sie verlieren.

FALL II: Bob ist am Zug.

Wenn Bob  $e_2$  färbt, so liegen, wie oben gesehen, erlaubte Typen vor. Färbt Bob  $e_1$  (bzw.  $e_3$ ), so antwortet Alice z.B. damit, dass sie  $e_2$  färbt. Die drei entstehenden unabhängigen Teilbäume sind von den Typen  $T_0$  und  $A$ .  $\square$

Der folgende Hilfssatz gehört nicht in die Reihe der Lemmata, die wir eigentlich beweisen wollen, doch er vereinfacht den Beweis der drei darauffolgenden Lemmata.

Lemma 47
----------

Einen unabhängigen Teilbaum $B$ mit genau 3 gefärbten Kanten, der nicht vom Typ $T_0$ ist, kann Alice durch einen echten Zug in erlaubte Typen zerlegen.
--

**Beweis:**

Seien  $a_1, a_2$  und  $a_3$  die gefärbten Kanten von  $B$  und  $v_0$  der Sternpunkt. Sei  $f$  die partielle Färbung. Sei  $b_1$  (bzw.  $b_2$ , bzw.  $b_3$ ) im Falle ihrer Existenz die letzte Kante (also die am Sternpunkt hängende) des Pfades von  $a_1$  (bzw.  $a_2$ , bzw.  $a_3$ ) nach  $v_0$  und  $k_1$  (bzw.  $k_2$ , bzw.  $k_3$ ) die Länge dieses Pfades. Ferner sei  $w_1$  (bzw.  $w_2$ , bzw.  $w_3$ ) der von  $v_0$  verschiedene Endknoten von  $b_1$  (bzw.  $b_2$ , bzw.  $b_3$ ).

■ *Fall 1:* Alle  $k_i \geq 1$

Falls eines der  $k_i$ , o.B.d.A.  $k_1$ , größer oder gleich 2 ist, kann Alice die Kante  $b_1$  färben, ohne in irgendeiner Weise Rücksicht auf  $f(a_1)$  nehmen zu müssen. Und zwar wählt Alice  $f(a_2)$  als Farbe, falls  $k_2 \equiv 1 \pmod{2}$ , (analog  $f(a_3)$  falls  $k_3 \equiv 1 \pmod{2}$ ), und eine von  $f(a_2)$  verschiedene Farbe, falls  $k_2, k_3 \equiv 0 \pmod{2}$ . Der entstehende unabhängige Teilbaum mit den gefärbten Kanten  $b_1, a_2$  und  $a_3$  ist bei dieser Farbwahl von keinem der drei verbotenen Typen  $T_{00}, T_{01}$  oder  $T_{11}$ .

Es bleibt der Fall  $k_1 = k_2 = k_3 = 1$  zu betrachten. Falls es zwei unterschiedlich gefärbte Kanten gibt, o.B.d.A.  $f(a_1) = \mathbf{a}$  und  $f(a_2) = \mathbf{b}$ , so färbt Alice die Kante  $b_1$  mit  $\mathbf{b}$ . Falls  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3) = \mathbf{a}$ , so gibt es die Möglichkeit, dass an einem der Knoten  $w_1, w_2$  oder  $w_3$  eine von  $b_1, b_2$  und  $b_3$  verschiedene Kante  $e$  hängt, falls diese vorliegt, so färbt Alice  $e$  mit  $\mathbf{b}$  und es entsteht Typ  $O_{11}$ . Falls andererseits ein solches  $e$  nicht existiert, so färbt Alice  $b_1$  mit  $\mathbf{b}$  und es entsteht Typ  $T_{\gamma}^{(2)}$ .

■ *Fall 2:*  $k_i = 0$  für genau ein  $i \in \{1, 2, 3\}$   
O.B.d.A. gelte  $k_1 = 0$ .

Falls eines der  $k_i$  größer oder gleich 2 ist, sagen wir o.B.d.A.  $k_2 \geq 2$ , so kann Alice die Kante  $b_2$  färben, ohne auf die Farbe von  $a_2$  Rücksicht nehmen zu müssen. Und zwar färbt Alice  $b_2$  mit  $f(a_3)$ , falls  $f(a_1) \neq f(a_3)$ , andernfalls von  $f(a_1) = f(a_3)$  verschieden. Damit ist gewährleistet, dass der entstehende unabhängige Teilbaum mit drei gefärbten Kanten nicht vom verbotenen Typ  $T_1$  ist.

Falls  $k_2 = k_3 = 1$  und  $f(a_2) \neq f(a_3)$ , so kann Alice immer entweder  $b_2$  mit  $f(a_3)$  oder  $b_3$  mit  $f(a_2)$  zulässig färben. Dabei entsteht kein verbotener Typ.

Falls  $k_2 = k_3 = 1$  und  $f(a_2) = f(a_3)$ , so färbt Alice im Fall  $f(a_2) = f(a_1)$  z.B. die Kante  $b_2$  mit einer beliebigen der drei zulässigen Farben, wie in den vorangegangenen Unterfällen entstehen dabei nur Typ  $Z$  und Typ  $T$ . Im verbleibenden Fall  $f(a_2) \neq f(a_1)$ , wo also  $B$  vom einfachsten Spezialfall des verbotenen Typen  $T_{11}$  ist, kann Alice nur dann  $b_2$  oder  $b_3$  färben, wenn  $B$  nur genau die fünf Kanten  $a_1, a_2, a_3, b_2$  und  $b_3$  enthält (Typ  $T_\gamma^{(1)}$  entsteht). Wenn es aber eine weitere Kante  $e$  gibt, o.B.d.A. hänge sie an  $w_2$ , dann färbt Alice  $e$  mit  $f(a_1)$ , so dass Typ  $D$  entsteht.

■ *Fall 3:* Genau zwei der  $k_i$  sind gleich 0  
O.B.d.A.  $k_1, k_2 = 0, k_3 \geq 1$ . Dann färbt Alice  $b_3$  in einer von  $f(a_1), f(a_2)$  und  $f(a_3)$  verschiedenen Farbe, es entstehen Typ  $T_0$  und Typ  $Z$ .

■ *Fall 4:* Alle  $k_i = 0$  für  $i \in \{1, 2, 3\}$   
Dann müsste  $B$  vom Typ  $T_0$  sein, was wir in der Voraussetzung ausgeschlossen hatten. □

Lemma 48	Sei $B$ ein unabhängiger Teilbaum von einem der Typen $L, I$ oder $Z$ , aber nicht vom Typ $L_0, I_0$ und $Z_0$ . Dann ist $B$ *-zerlegbar.
----------	---

**Beweis:**

Falls Typ  $L$  oder  $I$  vorliegt, so führt jede zulässige Färbung einer Kante trivialerweise zu erlaubten Typen. Durch den Ausschluss von  $L_0$  und  $I_0$  gewährleisten wir, dass ein Spieler tatsächlich einen Zug ausführen kann.

Falls Typ  $Z$  vorliegt und Alice am Zug ist, erhält sie durch zulässiges Färben einer Kante auf dem Pfad von einer gefärbten Kante zur anderen zwei erlaubte Typen  $Z$ , falls die Pfadlänge echt positiv ist, und durch zulässiges Färben einer zu den beiden gefärbten Kanten adjazenten Kante Typ  $I$  und  $T_0$ , falls die Pfadlänge null ist.

Falls Typ  $Z$  vorliegt und Bob am Zug ist, so zerlegt er den Baum entweder in erlaubte Typen, oder es entsteht ein nicht erlaubter unabhängiger Teilbaum mit genau 3 gefärbten Kanten, diesen kann Alice gemäß des vorigen Lemmas in erlaubte Typen zerlegen.

Alice und Bob können ziehen, da Typ  $Z_0$  ausgeschlossen war.  $\square$

**Lemma 49**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $X$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $X$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Dann kann Alice wie in Lemma 47 beschrieben vorgehen.

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob eine der Kanten  $a_i$  färbt, so liegt ein (verbotener) Typ mit genau drei gefärbten Kanten vor, und Alice färbt gemäß Lemma 47.

Falls Bob eine andere Kante färbt, so liegt entweder schon Typ  $O_{11}$  vor, oder Alice kann eine an einem der  $w_i$  hängende Kante färben, so dass Typ  $X$  in die Typen  $O_{11}$ ,  $Z$  und  $I$  zerlegt wird.  $\square$

**Lemma 50**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T$ , aber nicht vom Typ  $T_0$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

**Beweis:**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $T$ , aber nicht vom Typ  $T_0$ . Wir unterscheiden zunächst die beiden Situationen, ob Alice oder Bob am Zug ist.

FALL I: Alice ist am Zug.

Nach Lemma 47 kann Alice  $B$ , wie jeden unabhängigen Teilbaum mit genau 3 gefärbten Kanten, in einem Zug in erlaubte Typen zerlegen.

FALL II: Bob ist am Zug.

Bob färbt eine Kante in  $B$  und zerlegt  $B$  in unabhängige Teilbäume  $B'$  (und evtl.  $B''$ ). Falls  $B''$  existiert, ist  $B''$  o.B.d.A. vom Typ  $I$  oder  $Z$ . In jedem Fall hat dann  $B'$  entweder genau 3 oder 4 gefärbte Kanten. Alice muss also, wenn nicht  $B'$  auch schon von einem erlaubten Typ ist, den Baum  $B'$  in ihrem nächsten Zug in erlaubte Typen zerlegen. Falls  $B'$  genau 3 gefärbte Kanten enthält, so ist dies genau wie im Fall I möglich nach Lemma 47.



Wir betrachten für den Rest des Beweises den Fall, dass  $B'$  vier gefärbte Kanten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  umfasst. Dann gibt es eine Sternpunktmenge bezüglich der Kanten  $a_1, a_2, a_3, a_4$  die Knotenmenge eines tragenden Pfades

$$P = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_l v_l,$$

wobei die Länge  $l \geq 1$  ist wegen  $\Delta(B') \leq 3$ . Diesen Pfad nennen wir den Mittelpfad. Vereinfacht gesprochen kann man sich den Baum  $B'$  so vorstellen, dass an jedem Ende des Mittelpfades zwei Teilbäume hängen, die jeweils genau eine gefärbte Kante enthalten. O.B.d.A. hängen an  $v_0$  die Teilbäume mit  $a_1$  und  $a_2$ . Da  $B'$  aus einem unabhängigen Teilbaum  $B$  vom Typ  $T$  entstanden ist, muss eine der vier gefärbten Kanten direkt an einem Ende des Mittelpfades hängen, O.B.d.A. inzidiere  $v_l$  mit  $a_4$ . Den Pfad von der Kante  $a_1$  zum Knoten  $v_0$  bezeichnen wir als

$$P_1 = v_{1k_1} b_{k_1} \dots v_{12} b_2 v_{11} b_1 v_0,$$

mit der Länge  $k_1 \in \mathbb{N}_0$ . Analog nennen wir den Pfad von der Kante  $a_2$  zum Knoten  $v_0$

$$P_2 = v_{2k_2} c_{k_2} \dots v_{22} c_2 v_{21} c_1 v_0$$

mit der Länge  $k_2 \in \mathbb{N}_0$ , und den Pfad von  $a_3$  nach  $v_l$

$$P_3 = v_{3k_3} d_{k_3} \dots v_{32} d_2 v_{31} d_1 v_l$$

mit der Länge  $k_3 \in \mathbb{N}_0$ .

Im weiteren Verlauf des Beweises müssen wir recht viele Fälle unterscheiden, Alice wird ihren Zug davon abhängig machen, wie groß die vier Längenparameter  $l, k_1, k_2, k_3$  sind, insbesondere welche Kongruenz  $l, k_1, k_2, k_3 \equiv 0, 1 \pmod{2}$  vorliegt, und ferner davon abhängig, in welchen Farben  $a_1, a_2, a_3$  und  $a_4$  gefärbt sind. Sei  $f$  die partielle Färbung auf  $B'$ , d.h. in der Spielsituation nach Bobs Zug. Wenn wir im folgenden Kongruenzen schreiben, meinen wir immer Kongruenzen modulo 2.

■ *Fall 1:*  $k_1 \geq 1$  und  $k_2 \geq 1$  und  $k_3 \geq 1$

■ ■ *Fall 1.A:*  $l \geq 2$

In diesem Fall wird Alice immer  $e_1$  färben, so dass  $B'$  in zwei unabhängige Teilbäume vom Typ  $T$  zerlegt wird. Dabei muss sie nur darauf achten, dass nicht einer der beiden Teilbäume von einem der verbotenen Typen  $T_{00}, T_{01}$  oder  $T_{11}$  ist. Zur Vereinfachung der Sprechweise nennen wir den Teilbaum mit den gefärbten Kanten  $a_1, a_2$  und  $e_1$  den *linken Teilbaum*, den anderen den *rechten*.

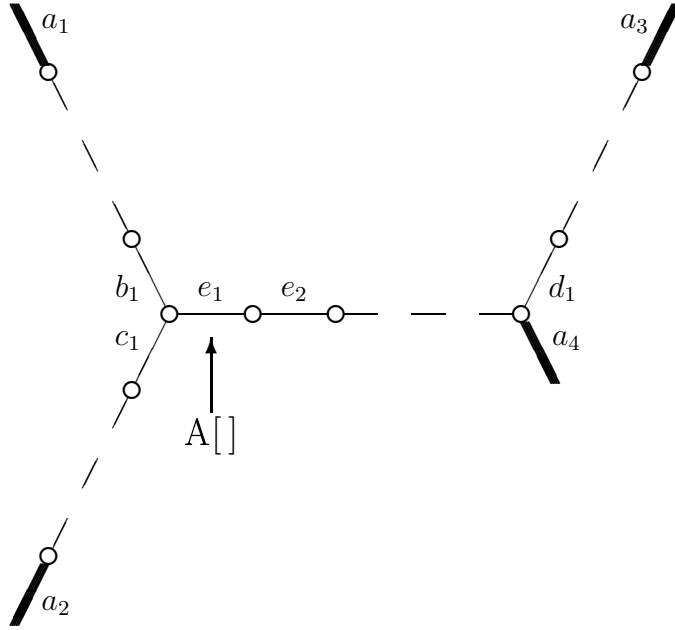


Abbildung 27: Situation im Fall 1.A

■■■ *Fall 1.A.1:*  $\#\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\} = 4$

Wenn Alice hier  $e_1$  mit einer der rechten Farben färbt, ist der linke Teilbaum erlaubt, wie jeder solche unabhängige Teilbaum mit drei paarweise verschieden gefärbten Kanten. Falls Alice  $e_1$  im Fall  $l - 1 \equiv 0 \pmod{2}$  mit  $f(a_3)$  und im Fall  $l - 1 \equiv 1 \pmod{2}$  mit  $f(a_4)$  färbt, so ist auch der rechte Teilbaum erlaubt. Man beachte, dass die Länge des Pfades von  $e_1$  nach  $v_l$  nur  $l - 1$  beträgt, nicht  $l$ !

■■■ *Fall 1.A.2:*  $\mathbf{d} \notin \{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4)\}$

Hier wird Alice im allgemeinen die Kante  $e_1$  mit  $\mathbf{d}$  färben. Dadurch kann der verbotene Typ  $T_{00}$  nicht entstehen, ebensowenig kann der linke Teilbaum vom Typ  $T_{01}$  oder der rechte vom Typ  $T_{11}$  sein. Die einzigen Fälle, in denen Alice mit dieser Färbemethode keinen Erfolg hat, sind also die beiden Situationen

- a)  $k_1 \equiv 1 \quad \wedge \quad k_2 \equiv 1 \quad \wedge \quad f(a_1) = f(a_2) \quad \text{oder}$
- b)  $l - 1 \equiv 1 \quad \wedge \quad k_3 \equiv 0 \quad \wedge \quad f(a_3) = f(a_4),$

wobei a) die Fälle darstellt, in denen die obige Färbervorschrift dazu führen würde, dass der entstehende linke Teilbaum vom Typ  $T_{11}$  wäre, wohingegen bei b) der entstehende rechte Teilbaum vom Typ  $T_{01}$  wäre.

Im Fall a) färbt Alice  $e_1$  mit  $f(a_1)$ . Dadurch ist der linke Teilbaum erlaubt.

Der rechte Teilbaum könnte nur dann vom Typ  $T_{00}$  sein, wenn  $l - 1 \equiv 0$  und  $k_3 \equiv 0$  und  $f(a_3) = f(a_4) = f(a_1)$ . Dann wäre aber der ursprüngliche Baum  $B$ , von dem wir vor Bobs Zug ausgegangen sind, selbst vom verbotenen Typ  $T_{00}$ . Dies macht man sich klar, indem man sich überlegt, dass  $B$  im Fall 1 entweder als gefärbte Kanten  $a_1$ ,  $a_4$  und  $a_3$  besitzt, oder  $a_2$ ,  $a_4$  und  $a_3$ . In beiden Fällen sind sämtliche Pfadlängen von einer gefärbten zu einer anderen gefärbten Kante (von  $B$ ) kongruent 0 modulo 2 (z.B. ist die Länge des Pfades von  $a_1$  nach  $a_4$  gleich  $k_1 + 1 + (l - 1)$  usw.) und ferner alle Kanten gleich gefärbt. Da aber  $B$  als vom Typ  $T$  vorausgesetzt war, der niemals Typ  $T_{00}$  sein kann, tritt die Möglichkeit, dass der rechte Teilbaum vom Typ  $T_{00}$  ist, überhaupt nicht auf. Mit Überlegungen der gleichen Art sieht man, dass der rechte Teilbaum auch niemals vom Typ  $T_{01}$  bzw. vom Typ  $T_{11}$  ist:

Der rechte Teilbaum könnte nur dann vom Typ  $T_{01}$  sein, wenn entweder  $(l - 1 \equiv 0$  und  $k_3 \equiv 1$  und  $f(a_4) = f(a_1) \neq f(a_3))$  oder  $(l - 1 \equiv 1$  und  $k_3 \equiv 0$  und  $f(a_3) = f(a_4) \neq f(a_1))$  gilt. In beiden Fällen wäre  $B$  vom Typ  $T_{01}$ , was einen Widerspruch zur Voraussetzung darstellt.

Der rechte Teilbaum könnte nur dann vom Typ  $T_{11}$  sein, wenn  $l - 1 \equiv 1$  und  $k_3 \equiv 1$  und  $f(a_3) = f(a_1) \neq f(a_4)$  gilt; dann wäre  $B$  aber vom Typ  $T_{11}$ . Widerspruch!

Im Fall b) färbt Alice die Kante  $e_1$  mit Farbe  $f(a_3)$ . Damit ist der rechte Teilbaum erlaubt.

Der linke Teilbaum könnte nur dann vom verbotenen Typ  $T_{00}$  sein, wenn  $k_1 \equiv 0$  und  $k_2 \equiv 0$  und  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$  gilt; dann wäre aber  $B$  selbst vom Typ  $T_{00}$ . Widerspruch!

Der linke Teilbaum könnte nur dann vom Typ  $T_{01}$  sein, wenn entweder  $(k_1 \equiv 0$  und  $k_2 \equiv 1$  und  $f(a_1) = f(a_3) \neq f(a_2))$  oder  $(k_1 \equiv 1$  und  $k_2 \equiv 0$  und  $f(a_2) = f(a_3) \neq f(a_1))$ ; in beiden Fällen wäre dann  $B$  entweder vom Typ  $T_{00}$  oder vom Typ  $T_{01}$ . Widerspruch!

Schlussendlich könnte der linke Teilbaum nur dann vom Typ  $T_{11}$  sein, wenn  $k_1 \equiv 1$  und  $k_2 \equiv 1$  und  $f(a_1) = f(a_2) \neq f(a_3)$ . Das ist ein Fall in der Schnittmenge von a) und b). Hierfür hatten wir schon weiter oben gesehen, dass dann  $B$  vom Typ  $T_{01}$  wäre. Widerspruch!

Somit haben wir Fall 1.A abgeschlossen, uns bleiben innerhalb des Falles 1 noch solche Bäume  $B'$  zu untersuchen, bei denen der Mittelpfad nur eine einzige Kante  $e_1$  enthält.

### ■ ■ Fall 1.B: $l = 1$

Wir werden gleich sehen, dass es sinnvoll war, Fall 1.B vom Fall 1.A abzutrennen, denn in diesem Fall wird Alice nicht immer auf erlaubte Typen kommen, wenn sie  $e_1$  färbt, sie wird manchmal auch andere Kanten färben müssen. Man

beachte, dass hier die Situation etwas anders gelagert ist, hier muss Alice auch aufpassen, dass kein rechter Teilbaum vom verbotenen Typ  $T_1$  entsteht, sowie, dass sie  $e_1$  nicht mit der Farbe der adjazenten Kante  $a_4$  färbt. (Die Bezeichnungen rechter und linker Teilbaum seien wie im vorigen Fall.)

■■■ *Fall 1.B.1:* ( $k_1 \equiv 0$  oder  $k_2 \equiv 0$ ) und  $k_3 \geq 2$

O.B.d.A. sei  $k_1 \equiv 0 \pmod{2}$ . Dann färbe Alice die Kante  $e_1$  in einer von  $f(a_1)$  und  $f(a_4)$  verschiedenen Farbe, der linke Teilbaum ist dann vom erlaubten Typ  $T(a^0b-)$ , der rechte Teilbaum ist wegen  $k_3 \geq 2$  sowieso erlaubt.

■■■ *Fall 1.B.2:*  $k_1 \equiv 0$  und  $k_2 \equiv 0$  und  $k_3 = 1$

Falls  $f(a_4) = f(a_3)$ , so färbe Alice wie eben  $e_1$  in einer von  $f(a_1)$  und  $f(a_4)$  verschiedenen Farbe.

Falls  $f(a_4) \neq f(a_3)$ , so färbe Alice  $e_1$  mit  $f(a_3)$ , dadurch ist der rechte Teilbaum erlaubt. Der linke wäre nur in dem Fall vom verbotenen Typ  $T_{00}$ , wenn  $f(a_1) = f(a_2) = f(a_3)$ , dann wäre aber  $B$  vom verbotenen Typ  $T_{11}$ , Widerspruch. Somit ist auch der linke Teilbaum erlaubt.

■■■ *Fall 1.B.3:*  $k_1 \equiv 0$  und  $k_2 \equiv 1$  und  $k_3 = 1$

Falls  $f(a_4) = f(a_3)$ , so färbe Alice die Kante  $e_1$  genau wie in 1.B.1.

Falls  $f(a_3) \neq f(a_4) = f(a_2)$ , so färbe Alice die Kante  $e_1$  mit  $f(a_3)$ , dadurch ist der rechte Teilbaum erlaubt. Der linke wäre nur im Fall  $f(a_1) = f(a_3)$  vom verbotenen Typ  $T_{01}$ , dann wäre aber  $B$  entweder vom Typ  $T_{11}$  oder vom Typ  $T_{01}$  gewesen, Widerspruch. Somit ist auch der linke erlaubt.

Falls  $f(a_3) \neq f(a_4) \neq f(a_2)$ , so kann Alice wie im vorigen Absatz in den meisten Fällen  $e_1$  mit  $f(a_3)$  färben. Dadurch wird der rechte Teilbaum zu einem erlaubten Typen. Der linke Teilbaum ist auch erlaubt, es sei denn, wir befinden uns im Fall  $f(a_1) = f(a_3) \neq f(a_2)$ , dann ist der linke Teilbaum vom verbotenen Typ  $T_{01}$ . Für den letzteren Fall zerlegt keine zulässige Färbung von  $e_1$  den Baum  $B'$  in zwei erlaubte Typen. Daher müssen wir uns hier etwas anderes überlegen.

Der verbleibende Fall lautet:  $f(a_1) = f(a_3) \neq f(a_4) \neq f(a_2) \neq f(a_3)$ . Also:  $f(a_1) = f(a_3) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_2) = \mathbf{b}$  und  $f(a_4) = \mathbf{c}$ . Hier färbt Alice die Kante  $b_1$  mit  $\mathbf{b}(= f(a_2))$  und erhält einen unabhängigen Teilbaum vom Typ  $V_1$ .

■■■ *Fall 1.B.4:*  $k_1 \equiv 1$  und  $k_2 \equiv 0$  und  $k_3 = 1$

Analog zu Fall 1.B.3.

■■■ *Fall 1.B.5:*  $k_1 \equiv 1$  und  $k_2 \equiv 1$

Falls  $f(a_1) \neq f(a_2)$ , so färbe Alice  $e_1$  mit  $f(a_3)$ , falls dies zulässig ist, d.h. falls  $f(a_3) \neq f(a_4)$ , ansonsten mit einer beliebigen anderen Farbe. Der linke Teilbaum ist dadurch nicht vom verbotenen Typ  $T_{11}$ , der rechte nicht vom verbotenen Typ  $T_1$ .

Falls  $f(a_1) = f(a_2)$ , so kann Alice im allgemeinen  $d_1$  mit einer Farbe  $f(d_1)$  derart färben, dass  $f(a_1) \in \{f(d_1), f(a_4)\}$ . Hierbei entsteht Typ  $O_{11}$ .

Letztere Färbung ist nur dann nicht zulässig, wenn  $k_3 = 1$  und ferner  $f(a_1) = f(a_3) \neq f(a_4)$  gilt. In diesem Fall färbe Alice  $e_1$  mit  $f(a_1)$ , wodurch linker und rechter Teilbaum erlaubt sind.

■ *Fall 2:*  $k_1 \geq 1$  und  $k_2 = 0$  und  $k_3 \geq 1$

Auch hier benutzen wir die Sprechweise *linker* und *rechter Teilbaum*, wenn Alice  $B'$  entlang einer Kante  $e_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, l\}$ ) zerlegt, wobei dann der linke Teilbaum der unabhängige Teilbaum mit den gefärbten Kanten  $a_1, a_2$  und  $e_i$  sei, der rechte entsprechend der andere.

■ ■ *Fall 2.A:*  $l \geq 2$  und ( $k_1 \geq 2$  oder  $k_3 \geq 2$ )

O.B.d.A. gelte  $k_1 \geq 2$ . Dann kann Alice  $B'$  immer durch Färben von  $e_1$  oder  $e_l$  in erlaubte Typen zerlegen. Wenn  $e_1$  gefärbt wird, ist wegen  $k_1 \geq 2$  auf jeden Fall der linke Teilbaum erlaubt, der rechte aber bei geeigneter Färbung auch, wie wir sofort sehen werden:

■ ■ ■ *Fall 2.A.1:*  $l - 1 \equiv 1$

Falls  $k_3 \equiv 1$  vorliegt, so färbe Alice hier  $e_1$  in einer von  $f(a_2)$ ,  $f(a_3)$  und  $f(a_4)$  verschiedenen Farbe  $\mathbf{d}$ . Dann kann der rechte Teilbaum wegen  $\mathbf{d} \neq f(a_3)$  niemals vom Typ  $T_{11}$  sein, andere verbotene Typen könnten naturgemäß nicht auftreten.

Falls  $k_3 \equiv 0$  und  $k_1 \equiv 1$ , so kann Alice analog die andere Endkante  $e_l$  des Mittelpfades in einer von  $f(a_1)$ ,  $f(a_2)$  und  $f(a_4)$  verschiedenen Farbe färben. Man beachte, dass hier tatsächlich die gleiche Situation vorliegt, wir hatten zwar ohne Beschränkung der Allgemeinheit gesagt, dass  $k_1 \geq 2$  gelten solle, und nicht unbedingt  $k_3 \geq 2$ , doch letzteres hat natürlich in diesem Unterfall wegen  $k_3 \equiv 0$  trivialerweise Gültigkeit.

Es bleibt der Fall  $k_3 \equiv 0$  und  $k_1 \equiv 0$  zu untersuchen. Falls  $f(a_2) \neq f(a_4)$ , so kann Alice einfach  $e_1$  mit  $f(a_4)$  färben, dadurch kann Typ  $T_{01}$  nicht entstehen. Falls  $f(a_2) = f(a_4)$ , so färbt Alice entweder  $e_1$  mit  $f(a_3)$  oder  $e_l$  mit  $f(a_1)$  auf zulässige Weise. Dadurch kann Typ  $T_{01}$  nicht auftreten. Letztere Färbung wäre nur dann nicht zulässig möglich, wenn alle vier gefärbten Kanten von  $B'$  die selbe Farbe besäßen. Doch dann wären alle vier Möglichkeiten für die Struktur vom ursprünglichen unabhängigen Teilbaum  $B$  jeweils vom verbotenen Typ  $T_{00}$ . Also tritt der zuletzt genannte Unterfall nicht auf und Alice kann immer zulässig färben.

Bemerkung: Man beachte, dass im Fall 2 die gleiche Konfiguration  $B'$  aus bis zu vier verschiedenen Konfigurationen (Möglichkeiten für das Aussehen von  $B$ ) entstehen kann, im Gegensatz zu Fall 1, in dem es nur bis zu zwei waren.

■■■ Fall 2.A.2:  $l - 1 \equiv 0$

Hier färbe Alice  $e_1$  in einer von  $f(a_2)$  und  $f(a_4)$  verschiedenen Farbe, der rechte Teilbaum ist dann weder vom Typ  $T_{00}$  noch vom Typ  $T_{01}$ .

■■ Fall 2.B:  $l \geq 2$  und  $k_1 = 1$  und  $k_3 = 1$

Hierbei wird Alice zwar in den meisten Fällen eine Kante des Mittelpfades färben und  $B$  in zwei Teilbäume vom Typ  $T$  zerlegen, wie auch bei 2.A, doch wird sie nicht immer mit der Färbung einer der beiden Randkanten  $e_1$  und  $e_l$  Erfolg haben, sondern in der Regel mittlere Kanten des Mittelpfades wählen müssen. In einem Fall funktioniert selbst letzteres nicht, dort wendet sie eine andere Gewinnstrategie an.

■■■ Fall 2.B.1:  $l \equiv 1$  ( $l \geq 3$ )

Wenn alle Kanten verschieden gefärbt sind, so färbe Alice die Kante  $e_2$  mit  $f(a_2)$ , wenn eine Farbe  $\mathbf{d}$  nicht unter  $f(a_1)$ ,  $f(a_2)$ ,  $f(a_3)$  und  $f(a_4)$  vorkommt, so färbe Alice  $e_2$  mit  $\mathbf{d}$ . In beiden Fällen sind weder der linke noch der rechte Teilbaum vom Typ  $T_{11}$ .

■■■ Fall 2.B.2:  $l \equiv 0$  und  $l \geq 4$

Alice färbe  $e_3$  in einer von  $f(a_2)$ ,  $f(a_4)$  und  $f(a_3)$  verschiedenen Farbe, dadurch entsteht weder links Typ  $T_{01}$  noch rechts Typ  $T_{11}$ .

■■■ Fall 2.B.3:  $l = 2$

Sei o.B.d.A.  $f(a_2) = \mathbf{a}$  und  $f(a_1) \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ . Im allgemeinen kann Alice  $e_1$  mit  $\mathbf{b}$  färben und damit  $B'$  in erlaubte Typen zerlegen, es sei denn der rechte Teilbaum ist vom Typ  $T_{11}$ . Letzteres ist der Fall, wenn  $f(a_3) = \mathbf{b}$  und  $f(a_4) \neq \mathbf{b}$ . Dann verfährt Alice wie folgt:

Falls  $f(a_1) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_2) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_3) = \mathbf{b}$ ,  $f(a_4) \neq \mathbf{b}$ , so färbt Alice  $e_2$  mit  $\mathbf{b}$ . Beide entstehenden unabhängigen Teilbäume sind offenbar erlaubt.

Der Fall  $f(a_1) = \mathbf{b}$ ,  $f(a_2) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_3) = \mathbf{b}$ ,  $f(a_4) = \mathbf{a}$  kann nicht auftreten, da sonst  $B$  von einem der verbotenen Typen  $T_{11}$  oder  $T_{01}$  gewesen wäre.

Sei nun  $f(a_1) = \mathbf{b}$ ,  $f(a_2) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_3) = \mathbf{b}$ ,  $f(a_4) = \mathbf{c}$ . Falls an  $v_1$  eine von  $e_1$  und  $e_2$  verschiedene ungefärbte Kante  $e$  hängt, so färbt Alice diese Kante mit  $\mathbf{a}$  und erhält einen unabhängigen Teilbaum vom Typ  $W$ . Ansonsten, d.h. falls  $\delta_{B'}(v_1) = 2$ , färbt Alice die Kante  $d_1$  mit  $\mathbf{a}$  und erhält einen unabhängigen Teilbaum vom Typ  $W_\gamma$ .

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man folgendes: Wenn eine der Kanten  $a_i$  nach außen gerichtet ist, so geht Alice nach Lemma 47 vor, anstatt Typ  $W$  oder  $W_\gamma$  zu erzeugen. Wenn alle Kanten  $a_i$  nach innen gerichtet sind, d.h. tatsächlich vorhanden sind, so entsteht eventuell bei der normalen Vorgehensweise von Alice statt Typ  $W$  Typ  $W^g$  oder statt Typ  $W_\gamma$  Typ  $T(a^-b^-c)$ .

■ ■ *Fall 2.C:  $l = 1$*

Hier kann Alice  $B'$  immer durch Färbung einer der beiden Kanten  $b_1$  oder  $d_1$  in einen unabhängigen Teilbaum vom Typ  $D$  und einen vom trivialen Typ  $Z$  zerlegen. Dies geschieht in den einzelnen Fällen folgendenmaßen:

■ ■ ■ *Fall 2.C.1:  $k_1 \geq 2$  oder  $k_3 \geq 2$*

Gelte o.B.d.A.  $k_1 \geq 2$ ,  $f(a_2) = \mathbf{a}$  und  $f(a_4) \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ . Dann färbe Alice  $b_1$  mit  $\mathbf{b}$ .

■ ■ ■ *Fall 2.C.2:  $k_1 = 1$  und  $k_3 = 1$*

Falls  $f(a_2) = f(a_4)$ , so färbe Alice  $b_1$  zulässig, d.h. von  $f(a_2)$  und  $f(a_1)$  verschieden.

Falls  $f(a_2) = \mathbf{a}$  und  $f(a_4) = \mathbf{b}$ , so ist entweder  $f(a_1) \neq \mathbf{b}$  oder  $f(a_3) \neq \mathbf{a}$ , im ersten Fall färbe Alice  $b_1$  mit  $\mathbf{b}$ , im zweiten  $d_1$  mit  $\mathbf{a}$ . Tatsächlich tritt der Fall  $f(a_1) = \mathbf{b}, f(a_2) = \mathbf{a}, f(a_3) = \mathbf{a}, f(a_4) = \mathbf{b}$  nicht auf, da sonst  $B$  von einem der verbotenen Typen  $T_{11}$  oder  $T_{01}$  gewesen wäre.

■ *Fall 3:  $k_1 \geq 1$  und  $k_2 \geq 1$  und  $k_3 = 0$*

■ ■ *Fall 3.A:  $l \geq 2$*

O.B.d.A. seien  $f(a_3) = \mathbf{a}$  und  $f(a_4) = \mathbf{b}$ .

■ ■ ■ *Fall 3.A.1:  $k_1 \equiv 0$  oder  $k_2 \equiv 0$*

O.B.d.A. gelte  $k_1 \equiv 0$ . Dann färbt Alice  $e_1$  in einer der beiden Farben  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$ , aber verschieden von  $f(a_1)$ . Der linke Teilbaum (Bezeichnungen wie in den vorigen Fällen) ist dann weder vom Typ  $T_{00}$  noch vom Typ  $T_{01}$ , der rechte wegen der speziellen Wahl der Farbe nicht vom Typ  $T_1$ .

■ ■ ■ *Fall 3.A.2:  $k_1 \equiv 1$  und  $k_2 \equiv 1$*

Im allgemeinen kann Alice  $e_1$  mit  $f(a_1)$  oder auch mit  $f(a_2)$  färben. Dadurch ist der linke Teilbaum in beiden Fällen erlaubt, also nicht vom Typ  $T_{11}$ . Wenn  $l \geq 3$  oder wenn  $\{f(a_1), f(a_2)\} \cap \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\} \neq \emptyset$  gilt, kann die Wahl der Farbe auch so erfolgen, dass der rechte Teilbaum erlaubt, d.h. nicht vom Typ  $T_1$  ist.

Die verbleibenden Fälle sind also jene, in denen  $f(a_1), f(a_2) \in \{\mathbf{c}, \mathbf{d}\}$  und  $l = 2$  gilt. Betrachten wir zunächst die Situation, in der  $f(a_1) \neq f(a_2)$  gilt: Hier färbt Alice  $e_1$  mit  $\mathbf{a}$ . Dadurch entsteht links der erlaubte Typ  $T(a^-b^-c)$  und rechts nicht der verbotene Typ  $T_1$ .

Wenn andererseits  $f(a_1) = f(a_2) =: \mathbf{c}$  gilt, so kann Alice in der speziellen Situation  $k_1 = k_2 = 1$  die Kante  $e_2$  mit  $\mathbf{c}$  färben. Sie erhält dann eine Zerlegung in Typ  $X$  und Typ  $T_0$ . Sei nun  $k_1 \geq 2$  oder  $k_2 \geq 2$ , o.B.d.A. gelte ersteres. Dann färbt Alice  $b_1$  mit  $\mathbf{c}$ , was wegen  $k_1 \geq 2$  zulässig ist, so dass Typ  $Y_1$  entsteht.

■ ■ *Fall 3.B:  $l = 1$*

Alice färbt die Kante  $b_1$  in einer der beiden Farben  $f(a_3), f(a_4)$  zulässig, d.h. eventuell verschieden von  $f(a_1)$ , und erhält Typ  $D$ .

■ *Fall 4:  $k_1 \geq 1$  und  $k_2 = 0$  und  $k_3 = 0$*

■ ■ *Fall 4.A:  $l \geq 3$*

Hier färbt Alice zum Beispiel die Kante  $e_1$ , und zwar, falls  $f(a_1) = f(a_2)$  gilt, mit einer von  $f(a_1)$  verschiedenen Farbe, ansonsten mit  $f(a_1)$ . Dadurch ist der linke Teilbaum (Bezeichnungen wie vorher) auf jeden Fall erlaubt, der rechte ebenso wegen  $l \geq 3$ .

■ ■ *Fall 4.B:  $l = 2$*

■ ■ ■ *Fall 4.B.1:  $k_1 \geq 2$*

Alice färbt  $e_1$  mit einer der beiden Farben  $f(a_3), f(a_4)$ , die verschieden von  $f(a_2)$  ist.

■ ■ ■ *Fall 4.B.2:  $k_1 = 1$*

Seien o.B.d.A.  $f(a_3) = \mathbf{a}$ ,  $f(a_4) = \mathbf{b}$  und  $f(a_1) \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ . Dann färbt Alice die rechte Endkante  $e_2$  des Mittelpfades mit  $\mathbf{d}$ . Der linke Teilbaum ist offenbar nicht vom verbotenen Typ  $T_{11}$ .

■ ■ *Fall 4.C:  $l = 1$*

Wenn  $f(a_2) = f(a_3)$  oder  $f(a_2) = f(a_4)$  gilt, dann ist  $B'$  schon vom erlaubten Typ  $D$ , d.h. Alice kann auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum weiterspielen, z.B. auch auf  $B'$ . Ihren Zug bei Typ  $D$  erläutern wir im nächsten Lemma.

Wenn  $f(a_2) \neq f(a_3) (\neq) f(a_4) \neq f(a_2)$ , so färbt Alice die Kante  $b_1$  mit einer der beiden Farben  $f(a_3), f(a_4)$ , die von  $f(a_1)$  verschieden ist. Dabei entsteht ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $A$ .

■ *Fall 5:  $k_1 = 0$  und  $k_2 = 0$  und  $k_3 = 0$*

■ ■ *Fall 5.A:  $l \geq 3$*

Dann kann Alice offensichtlich  $e_1$  in einer von  $f(a_1), f(a_2)$  verschiedenen Farbe färben.

■ ■ *Fall 5.B:  $l = 2$*

Wenn drei verschiedene Farben auf  $B'$  vorkommen, so färbe Alice  $e_1$  mit der dritten, von  $f(a_1)$  und  $f(a_2)$  verschiedenen Farbe.

Wenn nur zwei Farben vorkommen, kann Alice nicht so vorgehen, da sonst der verbotene Typ  $T_1$  entstehen würde. Stattdessen färbt sie im Falle ihrer Existenz die an  $v_1$  hängende ungefärbte Kante, die von  $e_1$  und  $e_2$  verschieden



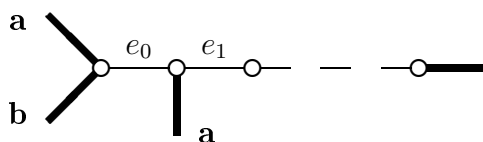
FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass statt Typ  $C$  ebenfalls Typ  $C_\gamma$  entstehen kann.

Dann ist  $B'$  vom Typ  $A$ , also erlaubt, und Alice kann auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum weiterspielen. Tatsächlich kann der Fall, dass alle vier gefärbten Kanten paarweise verschieden gefärbt sind, nicht auftreten, da sonst  $B$  vom verbotenen Typ  $T_1$  gewesen wäre.

■ *Fall 8:*  $k_1 = 0$  und  $k_2 = 0$  und  $k_3 > 1$

--	--

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $D$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.



**Beweis:**

FALL I: Alice ist am Zug.

FALL II: Bob ist am Zug.

109

■ *Fall 1:* Bob hat eine Kante  $e_i$  ( $i \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$ ) gefärbt

Falls Bob  $e_0$  gefärbt hat, so färbt Alice  $e_1$  mit **b**, **c** oder **d**, aber verschieden von  $x$  und  $f(e_0)$ . Dabei wird folgende Zerlegung von  $B$  erzeugt:  $T_0, T_0, Z$ .

Falls Bob  $e_i$  ( $i \geq 1$ ) gefärbt hat, so braucht Alice gar nicht zu reagieren, da dann schon eine Zerlegung in zwei erlaubte Typen  $A/D, Z$  vorliegt.

■ *Fall 2:* Bob hat eine andere Kante gefärbt

Genauer gesagt, habe Bob die Kante  $e$  in einem an  $v_k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) hängenden ungefärbten Teilbaum, der keine der Kanten  $e_i$  enthält, gefärbt. Sei  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_k$ .

Da für die Farben  $x$  und  $f(e)$  sowie die Pfadlängen  $l$  und  $n - k$  keinerlei Einschränkungen gemacht wurden, sind gewisse Betrachtungen symmetrisch, was wir ausnützen werden.

■ ■ *Fall 2.A:*  $l = 0$

Falls  $n = k$ , so färbt Alice  $e_k$  verschieden von **a**,  $x$  und  $f(e)$ . (Zerlegung:  $A/D, T_0, I$ )

Falls  $k < n$  und  $f(e) = x$ , so färbt Alice  $e_k$  in einer von  $f(e)$  und **a** verschiedenen Farbe. (Zerlegung:  $A/D, T, I$ )

Falls  $k < n$  und  $f(e) \neq x$  und  $n - k \geq 2$ , so färbt Alice ebenfalls  $e_k$  in einer von **a** und  $f(e)$  verschiedenen Farbe. (Gleiche Zerlegung wie oben)

Falls  $k < n$  und  $f(e) \neq x$  und  $n - k = 1$ , so kann Alice im allgemeinen  $e_k$  mit  $x$  färben und  $B$  damit in die Typen  $A/D, T, I$  zerlegen. Diese Färbung ist nur dann nicht zulässig, wenn  $n = 2$  und  $x = \mathbf{a}$ . Daher betrachten wir im nächsten Abschnitt diesen Fall gesondert.

Falls an  $v_2 (= v_n)$  eine weitere ungefärbte Kante  $\tilde{e}$  hängt, die von  $e_2$  verschieden ist, so färbt Alice  $\tilde{e}$  mit  $f(e)$ . (Zerlegung:  $B, I, I$ ) Wenn keine solche Kante existiert, so färbt Alice  $e_1$  von **a** und  $f(e)$  verschieden. (Zerlegung:  $A, T_\gamma^{(1)}, I$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass in dem kritischen Fall, in dem (ungerichtet) Typ  $B$  entsteht, stattdessen eventuell Typ  $B^g$  entsteht. Unkritisch ist der Fall, in dem  $e$  nach außen gerichtetes Blatt ist, da Alice dann gar nicht reagieren muss, da dann wieder Typ  $D$  vorliegt.

■ ■ *Fall 2.B:*  $n - k = 0$

Wegen der Symmetrie behandelt man diesen Fall vollkommen analog zu 2.A.

■ ■ *Fall 2.C:*  $l \geq 1$  und  $n - k \geq 1$

Falls  $l \equiv 0 \pmod{2}$  oder  $n - k \equiv 0 \pmod{2}$ , so färbt Alice  $e_k$  von **a**,  $x$  und  $f(e)$  verschieden. (Zerlegung:  $A/D, T(a^0 b^-), I$ )

Falls andererseits  $l \equiv 1 \pmod 2$  und  $n - k \equiv 1 \pmod 2$  gilt und wir zusätzlich annehmen, dass  $f(e) \neq \mathbf{a}$  oder  $x \neq \mathbf{a}$ , so färbt Alice, unter der Annahme  $x \neq \mathbf{a}$ , die man dann o.B.d.A. treffen kann, die Kante  $e_k$  mit  $x$ . (Zerlegung:  $A/D, T(a^1 a^-), I$ )

Es bleibt die Situation  $l \equiv 1 \pmod 2$  und  $n - k \equiv 1 \pmod 2$  und  $f(e) = \mathbf{a}$  und  $x = \mathbf{a}$  zu betrachten. Falls hier  $k \geq 2$  gilt, so färbt Alice  $e_k$  mit  $\mathbf{a}$ . (Zerlegung:  $A/D, T, I$ ) Falls  $k = 1$ , so färbt Alice  $e_0$  mit  $\mathbf{c}$ . (Zerlegung:  $T_0, O_{11}, I$ )  $\square$

Lemma 52

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $M$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

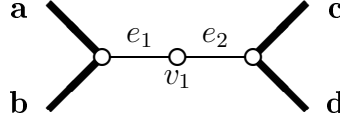


Abbildung 29: Struktur von Typ  $M$

### Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $M$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt z.B.  $e_1$  mit  $\mathbf{c}$  und zerlegt damit Typ  $M$  in zwei Typen  $T$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob eine der beiden Kanten  $e_i$  färbt, so färbt Alice die andere. (Zerlegung:  $T_0, Z, T_0$ )

Ansonsten färbt Bob eine Kante  $e$  in einem an  $v_1$  hängenden Teilbaum, der  $e_1$  und  $e_2$  nicht enthält. Sei  $k \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_1$ . Falls  $k = 0$  ist, so liegt Typ  $G$  vor, und Alice braucht nicht zu reagieren. Falls  $k \geq 1$  ist, so färbt Alice die letzte Kante auf dem Pfad von  $e$  nach  $v_1$  verschieden von der Farbe von  $e$  und produziert damit ebenfalls Typ  $G$ .

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass hier statt Typ  $G$  niemals ein verbotener Typ entstehen wird, sondern eventuell nur ein Typ  $M$  übrigbleiben wird.  $\square$

Lemma 53

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $N$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

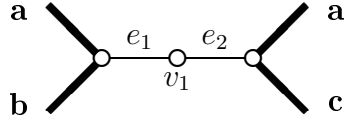


Abbildung 30: Struktur von Typ  $N$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $N$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt z.B.  $e_1$  mit **c** und zerlegt damit Typ  $M$  in zwei Typen  $T$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob eine der beiden Kanten  $e_i$  färbt, so färbt Alice die andere. (Zerlegung:  $T_0, Z, T_0$ )

Ansonsten färbt Bob eine Kante  $e$  in einem an  $v_1$  hängenden Teilbaum, der  $e_1$  und  $e_2$  nicht enthält. Sei  $k \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_1$  und sei  $\tilde{e}$ , falls existent, die letzte Kante auf diesem Pfad.

Falls  $k = 0$ , so liegt entweder Typ  $H$  oder  $C$  vor, und Alice braucht nicht zu reagieren, oder Bob hat  $e$  mit **b** oder **c** gefärbt, o.B.d.A. mit **b**. Dann färbt Alice  $e_2$  mit **d** (Zerlegung:  $A, I, T_0$ )

Falls  $k \geq 1$ , so färbt Alice die Kante  $\tilde{e}$  mit **a** oder **d**, aber verschieden von der Farbe von  $e$ . Sie erzeugt damit ebenfalls entweder Typ  $H$  oder  $C$ .

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass hier statt Typ  $H$  niemals ein verbotener Typ entstehen wird, sondern eventuell nur ein Typ  $N$  übrigbleiben wird.  $\square$

**Lemma 54**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $P$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

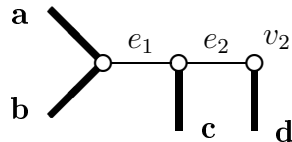


Abbildung 31: Struktur von Typ  $P$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $P$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt z.B.  $e_2$  mit **a**. (Zerlegung:  $A, Z$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob eine der beiden Kanten  $e_i$  färbt, färbt Alice die andere. (Zerlegung:  $T_0, T_0, Z$ )

Ansonsten kann Bob nur eine Kante  $e$  in einem an  $v_2$  hängenden Teilbaum färben. Sei  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_2$  und, falls  $l \geq 1$ , sei  $\tilde{e}$  die letzte Kante auf diesem Pfad.

Falls  $l = 0$ , so antwortet Alice durch Färben von  $e_2$ . (Zerlegung:  $A, T_0, I$ )

Falls  $l \geq 1$ , so färbt Alice  $\tilde{e}$  zulässig. (Zerlegung:  $H/G, Z, I$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass in der letzten Zerlegung statt Typ  $H$  oder  $G$  niemals ein verbotener Typ entstehen wird. Eventuell bleibt es bei Typ  $P$ .  $\square$

Lemma 55	Sei $B$ ein unabhängiger Teilbaum vom Typ $V_\nu$ in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist $B$ *-zerlegbar.
----------	---

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $V_\nu$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Dann färbt Alice die Kante  $w_2$  in der Farbe **b**, wobei (neben einem unabhängigen Teilbaum von einem trivialen Typ) Typ  $D$  entsteht.

FALL II: Bob ist am Zug.

Bob färbt irgendeine Kante zulässig. Sei  $f$  die partielle Färbung danach. Wir werden im folgenden die Antwort von Alice angeben.

■ *Fall 1:* Bob färbt eine der Kanten  $w_i$  ( $i \in \{1, 2\}$ )

Falls Bob  $w_2$  gefärbt hat, so färbt Alice  $e_1$  mit **d**. Dabei erzeugt sie Typ  $A, Z$  und  $Z$ .

Falls Bob  $w_1$  gefärbt hat, so färbt Alice  $w_2$  mit **b** und zerlegt dabei  $B$  in Typ  $Z, T_0$  und  $T$ . Man beachte, dass im Fall  $n = 1$  für die an  $v_1$  hängende gefärbte Kante  $\tilde{e}_2$  gilt:  $f(\tilde{e}_2) = h_\nu = \mathbf{b}$ , somit kann der verbotene Typ  $T_1$  nicht entstehen.

■ *Fall 2:* Bob färbt eine der Kanten  $e_i$  ( $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ )

Dann färbt Alice wie im vorigen Unterfall  $w_2$  mit **b**. Hierbei wird aber entweder Typ  $A$  oder  $D$  erzeugt.

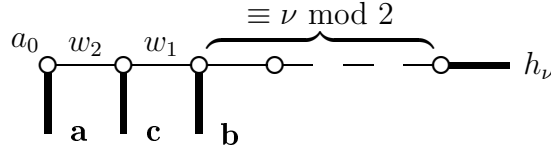


Abbildung 32: Struktur von Typ  $V_\nu$

■ *Fall 3:* Bob färbt eine Kante in dem ungefärbten  $a_0$ -Ast

In diesem Fall färbt Alice  $w_1$  mit **a** und erhält Typ  $A$  oder  $D$ . Die beiden anderen entstehenden unabhängigen Teilbäume sind ebenfalls erlaubt, da aus dem gleichen Grund wie im zweiten Unterfall von Fall 1 der verbotene Typ  $T_1$  nicht entstehen kann.

■ *Fall 4:* Bob färbt eine Kante  $\tilde{e}$  in einem ungefärbten  $v_k$ -Ast,  $1 \leq k \leq n$   
Sei die Zahl  $\sigma \in \{0, 1\}$  definiert durch die Festsetzung  $k \equiv \sigma \bmod 2$ . Sei ferner  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $\tilde{e}$  nach  $v_k$  und  $\tilde{e}_l$  die letzte Kante (d.h. die an  $v_k$  hängende) auf diesem Pfad im Falle ihrer Existenz, d.h. bei  $l \geq 1$ .

■ ■ *Fall 4.A:*  $l = 0$

Falls nicht die Situation ( $k = 1$  und  $f(\tilde{e}) = \mathbf{c}$ ) vorliegt, kann Alice die Kante  $e_1$  mit **c** zulässig färben. Durch diese Vorgehensweise wird  $B$  in zwei unabhängige Teilbäume der Typen  $I$  und  $D$  und einen Teilbaum mit genau drei gefärbten Kanten zerlegt. Letzterer ist im Fall  $2 \leq k \leq n - 1$  tatsächlich erlaubt, da im Fall  $\nu = 0$  von den Teilpfadlängen (von  $e_1$  nach  $v_k$ , bzw. von  $v_k$  nach  $v_n$ )  $k - 1$  bzw.  $n - k$  eine gerade und die andere ungerade ist und die äußeren Kanten beide mit  $h_\nu = \mathbf{c}$  gefärbt sind (Typ  $T(a^0 -^1 a)$ ), und da ferner im Fall  $\nu = 1$  die Teilpfadlängen  $k - 1$  bzw.  $n - k$  die gleiche Parität besitzen und die äußeren Kanten unterschiedlich ( $h_\nu \neq \mathbf{c}$ ) gefärbt sind (Typ  $T(a^\varepsilon -^\varepsilon b)$ ). In den Fällen  $k = 1$  oder  $k = n$  ist es noch leichter einzusehen, dass der Teilbaum erlaubt ist. Man sollte nur immer beachten, dass  $\tilde{e}$  direkt am tragenden Pfad hängt, dies bedeutet ja gerade  $l = 0$ .

Falls  $k = 1$  und  $f(\tilde{e}) = \mathbf{c}$ , so färbt Alice  $e_1$  mit **d**, wobei Typ  $P$  und Typ  $T$  entstehen, wie man leicht verifiziert.

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass hier statt Typ  $P$  kein verbotener unabhängiger Teilbaum, sondern Typ  $T(a^-b^-c)$  entsteht, falls  $e_1 = (b_0, v_1)$  ist.

■ ■ *Fall 4.B:*  $l \geq 1$

Hier hängt also  $\tilde{e}$  nur mittelbar am tragenden Pfad.

Falls  $k = n = 1$ , so färbt Alice  $\tilde{e}_l$  von **b** und  $f(\tilde{e})$  verschieden, was zu Typ  $E$  führt.

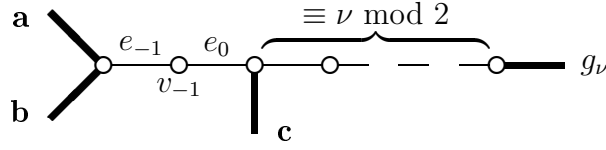


Abbildung 33: Struktur von Typ  $Y_\nu$

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass statt Typ  $E$  hierbei niemals ein verbotener Typ entsteht. Eventuell bleibt es bei Typ  $V_1$ .

Falls  $k = n \geq 2$ , so färbt Alice  $e_1$  mit  $\mathbf{c}$ . Wenn  $n - 1$  gerade ist, so gilt  $h_\nu \neq \mathbf{c}$ , also entsteht rechts (vgl. Abbildung bei der Definition von Typ  $V_\nu$ ) der erlaubte Typ  $T(a^0b^-)$ , wenn  $n - 1$  ungerade ist, so gilt  $h_\nu = \mathbf{c}$ , womit rechts der erlaubte Typ  $T(a^1a^-)$  entsteht. Daneben wird noch Typ  $D$  erzeugt.

Falls  $1 \leq k \leq n - 1$  so färbt Alice  $e_k$  in der Farbe  $h_{1-\sigma}$ . Links entsteht offensichtlich entweder Typ  $D$  oder Typ  $V_{1-\sigma}$ . Rechts liegt im Fall  $\nu = \sigma$  Typ  $T(a^0b^-)$  vor, im Fall  $\nu \neq \sigma$  Typ  $T(a^1a^-)$ . Damit ist auch in diesem allgemeinsten Fall eine Zerlegung in erlaubte unabhängige Teilbäume gelungen.  $\square$

Lemma 56

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $Y_\nu$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $Y_\nu$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice kann  $e_{-1}$  mit  $\mathbf{c}$  oder  $\mathbf{d}$  färben. Die Struktur von Typ  $Y_\nu$  bedingt, dass dabei weder der verbotene Typ  $T_{01}$  noch der verbotene Typ  $T_{11}$  entstehen, sondern zwei erlaubte Typen  $T$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

■ *Fall 1:* Bob färbt eine der Kanten  $e_i$  ( $i \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}$ )

Falls Bob  $e_{-1}$  färbt, so braucht Alice nicht zu reagieren, da dann die gleiche Zerlegung wie im Fall I vorliegt.

Falls Bob  $e_0$  mit  $\mathbf{a}$  oder  $\mathbf{b}$  färbt, so liegt eine Zerlegung in zwei Typen  $T$  vor. Man beachte, dass im Fall  $n = 1$  auch  $\nu = 1$  gilt, somit  $g_\nu = \mathbf{c}$  ist, was den verbotenen Typ  $T_1$  ausschließt. Alice kann also auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum gemäß ihrer Gewinnstrategie weiterspielen.

Falls Bob  $e_0$  mit  $\mathbf{d}$  färbt, so färbt Alice  $e_{-1}$  mit  $\mathbf{c}$ . Dabei entstehen Typ  $T_0$ ,  $Z$  und  $T$ , wobei das eben gesagte bezüglich des Nichtauftretens von Typ  $T_1$  auch hier Gültigkeit besitzt.

Falls Bob  $e_1$  färbt, zerlegt er  $B$  in zwei erlaubte Typen, von denen der eine entweder Typ  $M$  oder Typ  $N$  ist. Wieder ist Alice nicht gezwungen zu reagieren.

Falls Bob  $e_i$  ( $i \geq 2$ ) mit  $f(e_i)$  färbt, so färbt Alice  $e_1$  in einer der Farben **a**, **b** oder **d**, aber verschieden von  $f(e_i)$ . Auch hier entsteht Typ  $M$  oder  $N$ .

■ *Fall 2:* Bob färbt eine Kante im ungefärbten  $v_{-1}$ -Ast

Alice antwortet damit, dass sie  $e_0$  mit **a** oder **b**, aber verschieden von  $f(e)$  färbt. Dabei entsteht einerseits Typ  $A$  oder  $D$ , andererseits ist der verbotene Typ  $T_1$  mit der gleichen Begründung wie schon zweimal vorher ausgeschlossen.

■ *Fall 3:* Bob färbt eine andere Kante

Somit hat Bob eine Kante  $\tilde{e}$  in einem an  $v_k$  ( $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ) hängenden Teilbaum, der keine der Kanten  $e_i$  enthält, gefärbt. Sei  $f$  die partielle Färbung nach Bobs Zug. Sei  $\sigma \in \{0, 1\}$  gegeben durch  $k \equiv \sigma \pmod{2}$ . Sei ferner  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $\tilde{e}$  nach  $v_k$ .

■ ■ *Fall 3.A:*  $l = 0$

In diesem Fall wird Alice immer  $e_1$  färben und eine Zerlegung in Typ  $I$ ,  $T$  sowie  $M$  oder  $N$  erhalten.

Falls  $\nu = 1$ , so färbt Alice  $e_1$  mit **a** oder **b**, aber verschieden von  $f(\tilde{e})$ . Die relevanten Längen im rechten Teil des Baumes (vgl. Zeichnung bei der Definition von Typ  $Y_\nu$ ) sind  $k - 1$  und  $n - k$ , also von gleicher Parität. Man vergewissere sich, dass weder Typ  $T_{00}$  noch  $T_{11}$  bei dieser Färbung auftreten können, auch in den Sonderfällen  $k = 1$  und  $n = k$  tritt niemals Typ  $T_1$  auf.

Falls  $\nu = 0$  ist und nicht der Fall vorliegt, dass  $k = 1$  und  $f(\tilde{e}) = \mathbf{d}$  gilt, so kann Alice  $e_1$  mit **d** zulässig färben. Hier sind die relevanten Längen  $k - 1$  und  $n - k$  von unterschiedlicher Parität. Doch weder Typ  $T_{01}$  noch  $T_1$  entstehen, also sind die neuen unabhängigen Teilbäume erlaubt.

Es bleibt die Situation  $\nu = 0$ ,  $k = 1$ ,  $f(\tilde{e}) = \mathbf{d}$  zu betrachten. Hier färbt Alice einfach  $e_1$  mit **a**. Typ  $T_1$  kann nicht entstehen.

■ ■ *Fall 3.B:*  $l \geq 1$

Hier färbt Alice im allgemeinen die Kante  $e_k$ , außer im Fall  $k = n$ , in dem eine ähnliche Situation wie in 3.A vorliegt, doch nicht die identische, da wir hier nur über die Länge  $n$  Bescheid wissen, die andere Länge  $l$  kann ja beliebig sein, je nach dem Zug, den Bob zuletzt ausgeführt hat. Nehmen wir uns diesen Ausnahmefall zuerst vor:

Falls  $k = n \geq 2$ , so färbt Alice  $e_1$  mit **d**. Das Farbpaar  $(\mathbf{d}, g_\nu)$  hat zwei identische Einträge, falls  $1 - \nu = 1$ , und zwei verschiedene, falls  $1 - \nu = 0$ . Dies zeigt, dass im rechten Teil der erlaubte Typ  $T$  entsteht (nämlich  $T(a^1 a^- -)$  oder  $T(a^0 b^- -)$ ).



Wenn  $k = n = 1$  gilt, so färbt Alice  $e_1$  mit  $f(\tilde{e})$ , falls  $f(\tilde{e}) \neq \mathbf{c}$ , andernfalls mit  $\mathbf{d}$ .

Betrachten wir den interessantesten und verbleibenden Fall  $k < n$ . Dort färbt Alice die Kante  $e_k$  in der Farbe  $g_{1-\sigma}$ . Dadurch wird gewährleistet, dass links ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $Y_{1-\sigma}$  entsteht, rechts entsteht einer mit genau drei gefärbten Kanten, wobei genau eine dieser Kanten am Sternpunkt hängt. Zu zeigen bleibt also, dass letzterer Teilbaum vom Typ  $T$ , also nicht von einem der verbotenen Typen ist. Dies sieht man ein, indem man die beiden Fälle  $\nu = \sigma$  und  $\nu \neq \sigma$  betrachtet. Im ersten Fall ist zwar  $n - k \equiv 0$ , aber  $g_\nu \neq g_{1-\sigma}$ , was Typ  $T_{00}$  bzw.  $T_{01}$  ausschließt. Im zweiten ist  $n - k \equiv 1$ , aber  $g_\nu = g_{1-\sigma}$ , was  $T_{01}$  bzw.  $T_{11}$  verbietet.  $\square$

**Lemma 57**

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $O_{\mu\nu}$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $O_{\mu\nu}$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Dann färbt Alice die Kante  $e_1$  mit  $\mathbf{b}$  (dies ist immer zulässig möglich!) und erhält Typ  $D$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob die Kante  $e_0$  färbt, so entsteht neben Typ  $T_0$  ein unabhängiger Teilbaum mit genau drei gefärbten Kanten. Dieser kann gemäß einem der vorigen Lemmata von Alice in erlaubte Typen zerlegt werden.

Ansonsten färbt Bob eine Kante im linken oder rechten Teil von  $B$ , wobei der linke Teil der  $v_0$ -Ast sei, der  $e_{-1}$  enthalte, und der rechte Teil der  $v_0$ -Ast, der  $e_1$  enthalte. Wir können o.B.d.A. im folgenden annehmen, dass Bob eine Kante im rechten Teil färbt. Sei  $f$  die partielle Färbung nach diesem Zug von Bob.

■ *Fall 1:* Bob färbt eine der Kanten  $e_i$  ( $i \in \{1, \dots, n\}$ )

■ ■ *Fall 1.A:* Bob färbt  $e_1$

Falls Bob  $e_1$  mit  $\mathbf{a}$  oder  $\mathbf{b}$  gefärbt hat, so liegt schon Typ  $D$  vor und Alice muss nicht reagieren.

Andernfalls färbt Alice  $e_{-1}$  mit  $\mathbf{b}$  und erhält eine Zerlegung in Typ  $A$ ,  $Z$  und  $Z$ .

■ ■ *Fall 1.B:* Bob färbt  $e_i$  für ein  $i \geq 2$

Dann kann Alice in jedem Fall  $e_{-1}$  in der Farbe  $\mathbf{b}$  färben. Es entstehen die Typen  $D$  und zweimal  $Z$ .

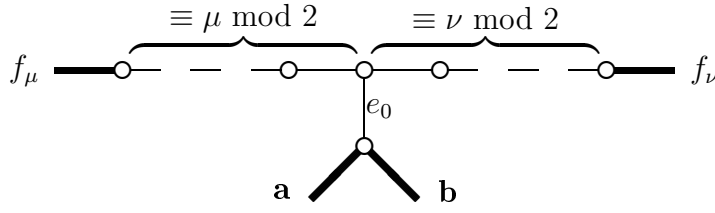


Abbildung 34: Struktur von Typ  $O_{\mu\nu}$

■ *Fall 2:* Bob färbt eine andere Kante  $e$

Dann ist unter den Knoten  $v_1, v_2, \dots, v_n$  ein „Abzweigknoten“, d.h. eindeutig bestimmt als der Knoten  $v_k$ , so dass der Pfad von  $e$  nach  $v_k$  die kürzeste Länge unter allen Pfaden von  $e$  nach  $v_i$  für  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  besitzt. Sei  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_k$ .

■ ■ *Fall 2.A:*  $l = 0$  (d.h.  $e$  hängt am tragenden Pfad)

■ ■ ■ *Fall 2.A.1:*  $k = n$

Falls  $k = n \geq 2$ , so zerlegt Alice einfach den entstandenen Teilbaum durch Färben von  $e_1$  mit  $f_\nu$  in zwei erlaubte Typen (nämlich  $D$  und  $T$ ).

Falls  $k = n = 1$ , so kann Alice  $e_{-1}$  mit **b**, **c** oder **d** zulässig färben, so dass Typ  $H$  oder  $C$  entsteht. Genauer sieht die Färbervorschrift für Alice so aus: Wenn Bob  $e$  mit **b** gefärbt hat, so färbt Alice mit **b**, wenn Bob mit **c**, dann Alice mit **d**, und wenn Bob mit **d** gefärbt hat, dann färbt Alice mit **c**.

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass statt Typ  $H$  hier eventuell nur entweder einer der erlaubten Typen  $N$  oder  $T$ , oder, und zwar nur in dem Fall, in dem  $e$  nach außen gerichtet ist und mit **c** oder **d** gefärbt wurde, ein verbotener Typ entsteht. Daher modifiziert man in letzterem Fall die Gewinnstrategie von Alice geringfügig, indem sie dort  $e_{-1}$  auch mit **b** (statt mit **c** bzw. **d**) färbt, wodurch dann Typ  $D$  oder  $T$  entsteht.

■ ■ ■ *Fall 2.A.2:*  $k < n$

Hier kann Alice immer  $e_1$  entweder mit  $f_\nu$  oder mit  $f_{1-\nu}$  (sprich: in einer der Farben **a** oder **b**) färben.

Falls  $k \equiv 1 \bmod 2$  und  $f(e) \neq f_\nu$ , oder falls  $k \equiv 0 \bmod 2$  und  $f(e) = f_\nu$ , so färbt Alice  $e_1$  mit  $f_\nu$ .

Falls  $k \equiv 1 \bmod 2$  und  $f(e) = f_\nu$ , oder falls  $k \equiv 0 \bmod 2$  und  $f(e) \neq f_\nu$ , so färbt Alice  $e_1$  mit  $f_{1-\nu}$ .

Man vergewissert sich, dass in allen Fällen keiner der verbotenen Typen  $T_1$ ,  $T_{00}$ ,  $T_{01}$  und  $T_{11}$  im rechten Teil entsteht. (Dazu unterscheide man in den Fällen  $k \equiv 1$  die Situationen  $k = 1$  und  $k \geq 3$ .) Somit wird  $B$  in Typ  $D$ ,  $T$  und  $I$  zerlegt.

■ ■ *Fall 2.B:  $l \geq 1$  (d.h.  $e$  hängt nicht am tragenden Pfad)*

■ ■ ■ *Fall 2.B.1:  $k = n$*

Falls  $k = n \geq 2$ , so färbt Alice  $e_1$  mit **b**. Man vergewissert sich, dass in beiden Fällen  $\nu = 0$  bzw.  $\nu = 1$  im rechten Teil ein unabhängiger Teilbaum vom erlaubten Typen  $T$  entsteht. Sei ab nun  $k = n = 1$ .

Falls  $l \geq 2$  oder ( $l = 1$  und  $f(e) \in \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$ ), so kann Alice genauso  $e_1$  mit **b** färben. Man beachte, dass im Fall  $k = 1$  dann auch nicht der verbotene Typ  $T_1$  auftreten kann.

Es bleibt die Situation  $k = n = l = 1$  mit  $f(e) \notin \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  zu betrachten. Hier färbt Alice  $e_{-1}$  mit **b**, so dass  $B$  in die Typen  $Z$ ,  $E$  und  $I$  zerlegt wird.

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass statt Typ  $E$  hierbei nur  $W_\gamma$ ,  $D$  oder  $T$  entstehen können, dies sind alles erlaubte Typen.

■ ■ ■ *Fall 2.B.2:  $k < n$*

Sei  $\sigma \in \{0, 1\}$  die Zahl mit  $k \equiv \sigma \pmod{2}$ . Dann färbt Alice die Kante  $e_k$  (d.h. die an der Innenseite des Abzweigknotens) in der Farbe  $f_{1-\sigma}$  und zerlegt  $B$  in Typ  $O_{\mu(1-\sigma)}$  oder  $D$ , sowie  $T$  und  $I$ .

Um zu überprüfen, dass der entstehende unabhängige Teilbaum mit drei gefärbten Kanten wirklich vom Typ  $T$ , also nicht verboten ist, beachte man, dass die Länge des kreisfreien Pfades von  $v_k$  nach  $v_n$  genau  $n - k > 1$  beträgt, also kongruent zu  $|\nu - \sigma|$  modulo 2 ist. Im Falle  $|\nu - \sigma| = 0$  sind die Farbe  $f_\nu$  der an  $v_n$  hängenden gefärbten Kante und die Farbe  $f_{1-\sigma}$  der von Alice gefärbten Kante  $e_k$  verschieden, was die verbotenen Typen  $T_{00}$  und  $T_{01}$  ausschließt; im Falle  $|\nu - \sigma| = 1$  sind  $f_\nu$  und  $f_{1-\sigma}$  gleich, was die verbotenen Typen  $T_{01}$  und  $T_{11}$  ausschließt.  $\square$

Lemma 58

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W_\gamma$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

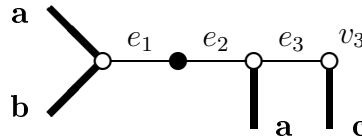


Abbildung 35: Struktur von Typ  $W_\gamma$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $W_\gamma$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_3$  mit **b**. (Zerlegung:  $C_\gamma$ ,  $Z$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so färbt Alice  $e_3$ . (Zerlegung:  $T_0, T/T_\gamma^{(1)}, Z$ )

Falls Bob  $e_3$  färbt, so färbt Alice  $e_2$  und erhält die gleiche Zerlegung.

Falls Bob eine Kante in einem an  $v_3$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der  $e_3$  nicht enthält, färbt, so färbt Alice  $e_2$  mit **c**. (Zerlegung:  $T_\gamma^{(1)}, A/D, I$ )  $\square$

Lemma 59

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $E$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

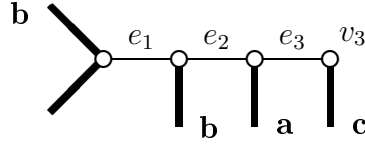


Abbildung 36: Struktur von Typ  $E$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $E$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Durch Färben von  $e_2$  mit **c** zerlegt Alice  $B$  in die erlaubten Typen  $A$  und  $T$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Falls Bob  $e_1$  oder  $e_2$  färbt, so antwortet Alice durch Färben von  $e_3$  mit **b**. Zerlegt wird in die Typen  $T_0, A$  und  $Z$ .

Falls Bob  $e_3$  bzw. eine Kante  $e$  in einem an  $v_3$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der  $e_3$  nicht enthält, färbt, so kann Alice immer  $e_2$  mit **c** färben. (Zerlegung:  $A, T_0, Z$  bzw.  $A, A/D, I$ )  $\square$

Lemma 60

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

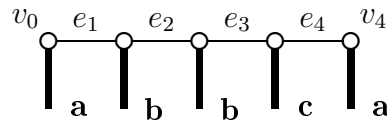


Abbildung 37: Struktur von Typ  $W$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $W$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Dann färbt Alice  $e_3$  mit **a** und zerlegt damit  $B$  in zwei unabhängige Teilbäume der Typen  $D$  und  $T$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

Bob färbt eine Kante zulässig. Sei  $f$  die partielle Färbung nach Bobs Zug.

Falls Bob  $e_1$  gefärbt hat, so färbt Alice  $e_3$  mit **a**. (Zerlegung:  $Z, A, T$ )

Falls Bob  $e_2$  mit **a** gefärbt hat, so färbt Alice  $e_4$  mit **b**. (Zerlegung:  $T, A, Z$ )

Falls Bob  $e_2$  anders, d.h. mit **c** oder **d** gefärbt hat, so färbt Alice  $e_1$  mit **c** oder **d**, doch verschieden von  $f(e_2)$ . (Zerlegung:  $Z, T_0, D/P$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass statt Typ  $P$  niemals der verbotene Typ  $T_1$  erzeugt wird, sondern eventuell Typ  $T(a^-b^-c)$ .

Falls Bob  $e_3$  gefärbt hat, so färbt Alice  $e_4$  mit **b**. (Zerlegung:  $D, T_0, Z$ )

Falls Bob  $e_4$  gefärbt hat, so färbt Alice andersherum  $e_3$  mit **a**. (Zerlegung: wie im vorigen Unterfall)

Falls Bob eine Kante in einem an  $v_4$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der  $e_4$  nicht enthält, gefärbt hat, so färbt Alice  $e_3$  mit **a**. (Zerlegung:  $D, A/D, I$ )

Falls Bob eine Kante  $\tilde{e}$  in einem an  $v_0$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der  $e_1$  nicht enthält, gefärbt hat, so liegt die komplizierteste Situation vor. Sei im folgenden

$$w_1\tilde{e}_1w_2\tilde{e}_2w_3\tilde{e}_3w_4\dots w_l\tilde{e}_lv_0$$

der Pfad der Länge  $l \geq 0$  von  $\tilde{e}$  nach  $v_0$ .

Falls  $l \neq 1$  oder  $f(\tilde{e}) \neq \mathbf{b}$  kann Alice  $e_1$  entweder mit **c** oder mit **d** färben, so dass nur erlaubte Typen entstehen. (Zerlegung:  $I, T, E$ )

Falls andererseits  $l = 1$  und  $f(\tilde{e}) = \mathbf{b}$  ist, und es eine dritte (also von  $\tilde{e}$  und  $\tilde{e}_1$  verschiedene) Kante  $\tilde{\tilde{e}}$  gibt, die an  $w_1$  hängt, so färbt Alice diese Kante  $\tilde{\tilde{e}}$  mit **a**. Dies ist die einzige Gelegenheit, bei der Typ  $R$  entsteht. Man vergewissert sich aber, dass man bei dieser Gelegenheit nicht mit den restlichen erlaubten Typen auskommen kann.

Der letzte zu betrachtende Fall ist der, bei dem  $l = 1$  und  $f(\tilde{e}) = \mathbf{b}$  gilt, aber der Knoten  $w_1$  nur Grad 2 hat. Dann färbt Alice  $e_1$  mit **c**. (Zerlegung:  $I, T_\gamma^{(1)}, E$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass in beiden Fällen, in denen bei dieser Strategie von Alice Typ  $E$  auftritt, stattdessen niemals nicht erlaubte Typen entstehen, sondern höchstens eventuell Typ  $V_1$ .

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man ferner, dass in dem kritischen Fall, in dem Typ  $R$  erzeugt wird, stattdessen eventuell Typ  $R^g$  entsteht. Unkritisch ist der Fall, in dem  $\tilde{e}$  nach außen gerichtet ist, da dann Typ  $W$  vorliegt und Alice nicht zu reagieren braucht.  $\square$

Lemma 61

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $R$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

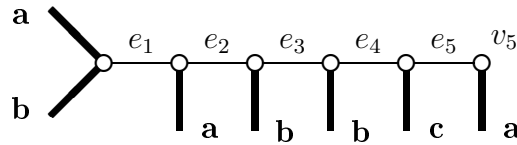


Abbildung 38: Struktur von Typ  $R$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $R$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_4$  mit **a** (Zerlegung von  $B$  in die Typen  $B$ ,  $T$ ).

FALL II: Bob ist am Zug.

Sei  $f$  die partielle Färbung nach Bobs Zug.

Falls Bob  $e_1$  färbt, so färbt Alice  $e_2$  in einer der Farben **c** oder **d**, aber verschieden von  $f(e_1)$ . (Der Baum  $B$  wird dadurch in drei unabhängige Teilbäume der Typen  $T_0$ ,  $T_0$ ,  $E$  zerlegt.)

Falls Bob  $e_2$  färbt, zerlegt er  $B$  in die Typen  $A$  und  $E$ . Alice kann auf einem beliebigen unabhängigen Teilbaum weiterspielen.

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass im Falle  $e_2 = (v_2, v_1)$  statt Typ  $E$  in beiden obigen Fällen Typ  $V_1$  entsteht, also kein verbotener Typ.

Falls Bob  $e_3$  mit **c** oder **d** färbt, so färbt Alice  $e_1$  mit  $f(e_3)$ . (Zerlegung:  $T_0$ ,  $A$ ,  $D/P$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass wenn  $e_3 = (v_3, v_2)$  ist, hier statt Typ  $P$  der erlaubte Typ  $T(a^-b^-c)$  entsteht.

Falls Bob  $e_3$  mit **a** färbt, so färbt Alice  $e_5$  mit **b**. (Zerlegung:  $C$ ,  $A$ ,  $Z$ )

Falls Bob  $e_4$  färbt, so färbt Alice  $e_5$  mit **b**. (Zerlegung:  $B$ ,  $T_0$ ,  $Z$ )

Falls Bob  $e_5$  färbt, so färbt Alice  $e_4$  mit **a**. (Zerlegung:  $B$ ,  $T_0$ ,  $Z$ )

Falls Bob eine Kante in einem an  $v_5$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der die Kante  $e_5$  nicht enthält, färbt, so färbt Alice  $e_4$  mit **a**. (Zerlegung:  $B, A/D, I$ )

FÜR DEN BEWEIS IM GERICHTETEN FALL beachte man, dass in allen vier Fällen, in denen ungerichtet Typ  $B$  erzeugt würde, hier eventuell Typ  $B^g$  entsteht.  $\square$

Zusammengenommen beweisen die Lemmata dieses Abschnittes die erste Teilaussage von Theorem 44, und damit die erste Teilaussage von Theorem 25 im Fall  $\Delta = 3$ .

## 9.6 Zerlegung der zusätzlichen erlaubten Typen

Nun werden wir noch die Zerlegung der 6 zusätzlichen erlaubten Typen, um die wir beim gerichteten Spiel nicht drumherumkommen, besprechen.

Lemma 62	Sei $B$ ein unabhängiger Teilbaum vom Typ $T^g$ in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist $B$ *-zerlegbar.
----------	---

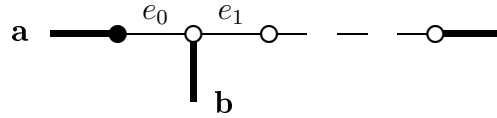


Abbildung 39: Struktur von Typ  $T^g$

### Beweis:

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $T^g$ . Sei die Farbe der dritten gefärbten Kante als  $x$  bezeichnet.

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_1$  verschieden von **b** und  $x$ .

FALL II: Bob ist am Zug.

■ *Fall 1:* Bob färbt eine der Kanten  $e_i$

Falls Bob  $e_0$  mit  $f(e_0)$  färbt, so antwortet Alice durch Färben von  $e_1$  in einer von  $f(e_0)$ , **b** und  $x$  verschiedenen Farbe.

Falls Bob ein anderes  $e_i$  färbt, so liegt schon eine erlaubte Zerlegung vor und Alice braucht nicht zu reagieren.

■ *Fall 2:* Bob färbt eine Kante  $e$  in einem ungefärbten  $v_k$ -Ast,  $1 \leq k \leq n$ . Sei  $f$  die partielle Färbung nach Bobs Zug. Sei  $l \geq 0$  die Länge des Pfades von  $e$  nach  $v_k$ .

■ ■ *Fall 2.A:  $l = 0$  oder  $n - k = 0$*

O.B.d.A. gelte  $l = 0$ .

Falls  $k \geq 2$ , so färbt Alice  $e_k$  mit  $x$ , es sei denn dies ist nicht zulässig möglich, dann in einer sonstigen Farbe. Rechts entsteht der erlaubte Typ  $T$  (oder  $Z$  oder  $I$ ).

Falls  $k = 1$  und ( $n \geq 3$  oder  $n = 1$ ) so färbt Alice  $e_1$  verschieden von  $\mathbf{b}$ ,  $f(e)$  und  $x$ . Dabei entsteht niemals der verbotene Typ  $T_1$ .

Falls  $k = 1$  und  $n = 2$ , so ist die Sache etwas komplizierter. Falls  $x \neq \mathbf{b}$  und  $f(e) \neq x$ , so färbt Alice  $e_1$  mit  $x$ , falls  $f(e) = x$ , so  $e_1$  in einer von  $\mathbf{b}$  und  $x$  verschiedenen Farbe. Es bleibt der Fall  $x = \mathbf{b}$  und  $f(e) \neq \mathbf{b}$  zu untersuchen.

Falls an  $v_2$  eine von  $e_2$  verschiedene ungefärbte Kante  $\tilde{e}$  hängt, so färbt Alice diese mit  $f(e)$ . Dabei entsteht Typ  $B^g$  oder  $B_\gamma^g$ . Ansonsten liegt schon Typ  $B_\gamma^g$  vor und Alice braucht nicht zu antworten.

■ ■ *Fall 2.B:  $l \geq 1$  und  $n - k \geq 1$*

Falls  $l \equiv 0 \pmod{2}$  oder  $n - k \equiv 0 \pmod{2}$  gilt, so färbt Alice  $e_k$  in einer von  $\mathbf{b}$ ,  $x$  und  $f(e)$  verschiedenen Farbe.

Sei nun  $l \equiv 1 \pmod{2}$  und  $n - k \equiv 1 \pmod{2}$ . Falls  $x \neq f(e)$ , so färbt Alice ebenfalls  $e_k$  in einer von  $\mathbf{b}$ ,  $x$  und  $f(e)$  verschiedenen Farbe. Ansonsten färbt Alice im Unterfall  $k \geq 2$  oder im Unterfall  $x = f(e) \neq \mathbf{b}$  die Kante  $e_k$  mit  $x$ .

Übrig bleibt der Fall, in dem  $x = f(e) = \mathbf{b}$  und  $k = 1$  gilt. Hier färbt Alice  $e_0$  mit  $\mathbf{c}$ . Es entsteht Typ  $O_{\mu\nu}$  oder  $O_{\mu\nu}^g$ . □

Lemma 63

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $O_{\mu\nu}^g$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$  \*-zerlegbar.

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $O_{\mu\nu}^g$ .

Die Zerlegung geht fast analog zu der von Typ  $O_{\mu\nu}$ . Allerdings entstehen statt Typ  $D$  evtl. Typ  $T$  oder  $T^g$ , statt Typ  $A$  evtl. Typ  $T$  oder  $T_\gamma^{(1)}$ , statt Typ  $T$  evtl. Typ  $Z$  und statt Typ  $O_{\varepsilon\sigma}$  evtl. Typ  $O_{\varepsilon\sigma}^g$ .

Im Fall 2.A.1 färbt Alice jedoch immer  $e_1$  zulässig (falls  $n = k = 2$ , so in der Farbe  $f_\nu$ ).

Im letzten Unterfall  $k = n = l = 1$  und  $f(e) \notin \{\mathbf{a}, \mathbf{b}\}$  von Fall 2.B.1 färbt Alice einfach  $e_1$  mit  $f(e)$ .

Durch diese beiden (unbedingt notwendigen) Abwandlungen der Zerlegung von Typ  $O_{\mu\nu}$  erzielt man als Nebeneffekt, dass bei der Zerlegung von Typ  $O_{\mu\nu}^g$  keiner der „komplizierten“ Typen  $H$ ,  $C$  oder  $E$  entsteht. □



Lemma 64

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B_\gamma^g$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Der Beweis beruht einfach auf der Tatsache, dass jede der drei ungefärbten Kanten mit mindestens zwei möglichen Farben gefärbt werden könnte. Sobald die mittlere Kante gefärbt ist, kann für Alice gar nichts mehr schief gehen. Selbst wenn Bob am Zug ist, kann Alice sich im nächsten Zug der mittleren Kante bemächtigen. Man vergleiche auch den Beweis zu Typ  $B$ .  $\square$

Lemma 65

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $W^g$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

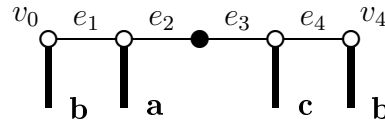


Abbildung 40: Struktur von Typ  $W^g$

**Beweis:**

Die Bezeichnungen seien wie in der Definition von Typ  $W^g$ .

FALL I: Alice ist am Zug.

Alice färbt  $e_2$  mit **b**. (Zerlegung:  $T/Z, T^g/Z$ )

FALL II: Bob ist am Zug.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit genügt es, die Fälle zu betrachten, in denen Bob eine Kante in der linken Hälfte des unabhängigen Teilbaumes färbt.

Falls Bob  $e_1$  färbt, so färbt Alice  $e_2$  mit **b**. (Zerlegung:  $Z/I, T_0/Z/I, T^g/Z$ )

Falls Bob  $e_2$  färbt, so färbt Alice  $e_1$ . (Zerlegung:  $Z/I, T_0/Z/I, T/T^g/Z$ )

Falls Bob eine Kante  $e$  in einem an  $v_0$  hängenden ungefärbten Teilbaum, der die Kante  $e_1$  nicht enthält, färbt, so färbt Alice  $e_2$  mit **b**. (Zerlegung:  $I/L, D/A/T/T^g/Z, T^g/Z$ )  $\square$

Lemma 66

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $B^g$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Auch hier liegt der Fall vor, dass jede der drei ungefärbten Kanten mit mindestens zwei verschiedenen Farben gefärbt werden kann, also geht Alice wie bei Typ  $B$  bzw.  $B_\gamma^g$  vor.  $\square$

Lemma 67

Sei  $B$  ein unabhängiger Teilbaum vom Typ  $R^g$  in einer beliebigen Spielsituation. Dann ist  $B$   $*$ -zerlegbar.

**Beweis:**

Die Zerlegung ist ähnlich wie bei Typ  $R$ .



Zusammengenommen beweisen die Lemmata der letzten beiden Abschnitte die zweite Teilaussage von Theorem 44, und damit die zweite Teilaussage von Theorem 25 im Fall  $\Delta = 3$ .

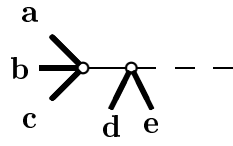
## 10 Einige Schwierigkeiten bei Kantenfärbungsspielen auf Wäldern mit $\Delta = 4$

Bisher ist es nicht gelungen, eine zu Theorem 25 analoge Aussage im Fall von Wäldern mit maximalem Knotengrad  $\leq 4$  zu zeigen. Dies kommt nicht von ungefähr, denn sowohl die Beweisideen in den Fällen  $\Delta \geq 5$  als auch die im Fall  $\Delta = 3$  können nicht mehr verwendet werden, wie in diesem Abschnitt illustriert werden soll. Mehr noch, es treten derart viele Schwierigkeiten auf, dass man vermuten kann, dass kein Analogon zu Theorem 25 im Fall  $\Delta = 4$  existiert, d.h. dass  $i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_4) = 6$  und/oder  $\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_4) = 6$  gilt. Allerdings ist es noch für keines der zwölf Spiele **(UKAnt)** $[X, Y]$  bzw. **(GKant)** $[X, Y]$  gelungen, ein Beispiel eines Waldes  $W$  mit  $\Delta(W) \leq 4$  zu finden, auf dem Bob eine Gewinnstrategie mit 5 Farben besitzt.

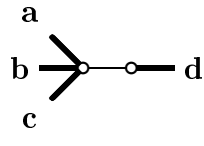
Dass die Gewinnstrategie von Alice aus den Fällen  $\Delta = 5$  und  $\Delta \geq 6$  nicht auf den Fall  $\Delta = 4$  übertragen werden kann, macht man sich am besten anhand der in Abbildung 41 vorgestellten problematischen Konfigurationen klar. Wir nennen eine Konfiguration zu einem Zeitpunkt des Spiels *verboten*, wenn Bob danach eine Gewinnstrategie mit 5 Farben besitzt (falls ausreichend viele ungefärbte Kanten vorhanden sind). Als Spiel betrachten wir der Einfachheit halber eines der ungerichteten Spiele.

Sobald  $Q_1$  auftritt, wird Bob gewinnen. Weil  $Q_1$  also verboten ist, sind auch  $Q_2$  nach Zügen von Alice und  $Q_3$  nach Zügen von Alice und Bob verboten.  $Q_4$  ist nach Zügen von Alice und Bob verboten wegen der Verbote von  $Q_1$  und  $Q_2$ .  $Q_5$  ist nach Zügen von Alice verboten, da  $Q_3$  nach Zügen von Bob verboten ist.  $Q_6$  ist immer verboten, nach Zügen von Alice wegen des Verbots von  $Q_4$ , nach Bobs Zügen wegen der Verbote der Konfigurationen  $Q_2$ ,  $Q_4$  und  $Q_5$ . Das absolute Verbot von  $Q_7$  folgt aus dem von  $Q_6$ . Nach Zügen von Alice sind ferner  $Q_8$ ,  $Q_9$ ,  $Q_{10}$  und  $Q_{11}$  verboten,  $Q_8$  wegen des Verbots von  $Q_4$ ,  $Q_{11}$  wegen des Verbots von  $Q_7$ , die beiden anderen Konfigurationen wegen des Verbots von  $Q_6$ .

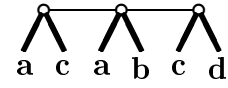
Bei den üblichen Strategien in den Fällen  $\Delta \geq 5$  entstehen nach Zügen von Alice relativ beliebige reguläre 3-Sterne (ohne stark unpassende Kanten), aus denen Bob relativ beliebige 4-Sternschnuppen machen kann, unter anderem solche von den Typen  $Q_{12}$  und  $Q_{13}$ . Nun ist es im Fall  $\Delta = 4$  unmöglich für Alice, diese entlang einer der Kanten  $e$  bzw.  $e_1$  oder  $e_2$  der Mittelpfade zu zerlegen: die Färbung von  $e$  führt immer zur verbotenen Konfiguration  $Q_9$ , die von  $e_1$  zu  $Q_{10}$  oder  $Q_{11}$ , die von  $e_2$  zu  $Q_9$  (rechts oder links). Also bleibt Alice nur übrig, eine andere Kante zu färben (oder auf einem anderen unabhängigen Teilbaum zu spielen). Dies hat zur Folge, dass Bob im nächsten Zug aus diesen Sternschnuppen noch kompliziertere Konfigurationen konstruieren kann, für die die übliche Strategie von Alice nicht vorgesehen ist. Ähnliche Probleme



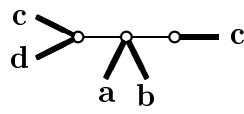
Typ  $Q_1$



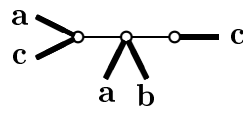
Typ  $Q_2$



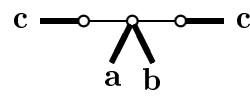
Typ  $Q_3$



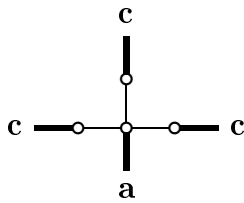
Typ  $Q_4$



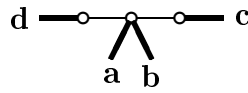
Typ  $Q_5$



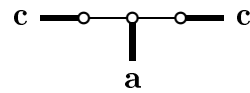
Typ  $Q_6$



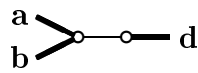
Typ  $Q_7$



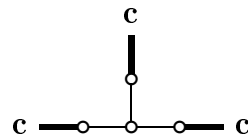
Typ  $Q_8$



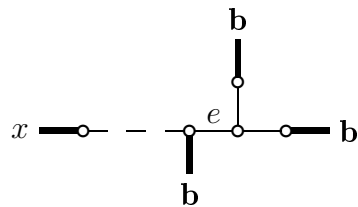
Typ  $Q_9$



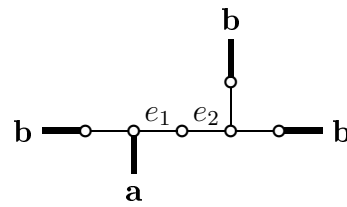
Typ  $Q_{10}$



Typ  $Q_{11}$



Typ  $Q_{12}$



Typ  $Q_{13}$

Abbildung 41: Verbotene und problematische Konfigurationen im Fall  $\Delta = 4$

treten auch bei 5-Sternschnuppen auf.

Also bleibt Alice nur der Versuch, gemäß einer ähnlichen kombinatorischen Strategie wie im Fall  $\Delta = 3$  zu spielen. Doch hier wäre nicht nur die Zerlegung von 4-Sternschnuppen sehr arbeitsintensiv, sondern auch die der 5-Sternschnuppen sowie der vielen noch komplizierteren Strukturen, denen wir gar keinen Namen gegeben haben, die aber auftreten können, wie wir gerade gesehen haben. Wenn es tatsächlich eine Gewinnstrategie von Alice mit 5 Farben gibt, dann müsste man sie folgendermaßen finden:

1. verbotene Konfigurationen erraten
2. bestimmen, bis zu welchem Grad von „Kompliziertheit“ Konfigurationen auftreten
3. alle Konfigurationen zerlegen

Diese Schritte gehen natürlich Hand in Hand. Wenn irgendwo im 1581sten Fall einer Zerlegung die Unmöglichkeit der Zerlegung festgestellt wird, muss neu geraten werden und ganz von vorne angefangen werden. Dies ist freilich nur ein Hinweis darauf, weshalb noch kein Mensch auf die richtige Idee gekommen ist.

Ein tatsächliches Indiz dafür, das auch keine dem Fall  $\Delta = 3$  ähnliche Strategie im Fall  $\Delta = 4$  funktioniert, ist folgendes: Im Fall  $\Delta = 3$  waren alle  $\Delta$ -Sterne zumindest nach Bobs Zug erlaubt (nach Lemma 47), im Fall  $\Delta = 4$  gibt es  $\Delta$ -Sterne, die immer verboten sind, nämlich die Konfigurationen  $Q_6$  und  $Q_7$ . Die Strategie im Fall  $\Delta = 3$  beruhte aber darauf, dass Alice jeden  $\Delta$ -Stern in erlaubte Typen zerlegen konnte. Ob eine andere kombinatorische Strategie funktioniert, wenn selbst manche der einfachsten Typen unabhängiger Teilbäume, nämlich Sterne, immer verboten sind, erscheint mehr als fragwürdig.

Wenn es ein Beispiel eines Waldes  $W$  mit  $\Delta(W) \leq 4$  und spielchromatischem Index 6 gibt, so müsste man nur die in Abbildung 41 begonnenen Überlegungen fortführen, solange, bis man die Erkenntnis gewinnt, dass ein ungefärbter unabhängiger Teilbaum (mit genügend vielen Kanten) verboten ist. Doch der Weg dahin, wenn es einen gibt, könnte sehr weit sein.



## Teil III

# Ausblicke

## 11 Spiele auf unendlichen Graphen

### 11.1 Unendliche Graphen

Ein *unendlicher gerichteter* (oder *ungerichteter*) *Graph* wird genauso definiert wie ein gewöhnlicher Graph, nur dass für Knoten- und Kantenmenge nun auch unendliche Mengen erlaubt sind.

Genauer ist ein *unendlicher gerichteter Graph*  $G$  ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine Menge beliebiger Kardinalität ist und  $E \subseteq \{(v, w) \in V \times V \mid v \neq w\}$  mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$\forall v, w \in V : \quad ((v, w) \in E \implies (w, v) \notin E).$$

Ein *unendlicher ungerichteter Graph*  $G$  ist ein Paar  $(V, E)$ , wobei  $V$  eine Menge beliebiger Kardinalität ist und  $E \subseteq \{M \in \mathcal{P}(V) \mid \#M = 2\}$ . Für unendliche ungerichtete Graphen definieren wir wieder

$$\forall \{v, w\} \in E : \quad (v, w) := (w, v) := \{v, w\}.$$

In beiden Fällen nennen wir die Elemente von  $V$  *Knoten* und die von  $E$  *Kanten*. Um keine Verwirrung bei so vielen Begriffen von „Graphen“ zu erzeugen, nennen wir Graphen, wie sie bisher definiert wurden, im Folgenden *endliche Graphen*. Endliche Graphen sind also Spezialfälle von unendlichen Graphen.

Die weiteren Begriffe aus 1.1 und 1.3 können wortwörtlich auf unendliche Graphen übertragen werden. Man beachte, dass Pfade immer noch als endliche Folge definiert werden.

Die Begriffe des Knotengrades aus 1.2 müssen nur dahingehend modifiziert werden, dass wir in den Definitionen von  $\delta_G(v)$ ,  $\delta_G^+(v)$  und  $\delta_G^-(v)$  statt unendlichen Kardinalzahlen immer das Symbol  $\infty$  definieren. Wir wollen schließlich keine axiomatische Mengenlehre betreiben, in der zwischen verschiedenen unendlichen Kardinalitäten unterschieden wird. Ferner muss nun in den Definitionen von  $\Delta(G)$ ,  $\Delta^+(G)$  und  $\Delta^-(G)$  statt einem Maximum ein Supremum gebildet werden.

Bei unendlichen Graphen können kuriose Phänomene auftreten. In endlichen Wäldern, die mindestens eine Kante enthielten, gab es immer ein Blatt,

i.a. sogar recht viele Blätter. Es gibt aber unendliche Wälder mit unendlich vielen Kanten, die kein einziges Blatt besitzen. So zum Beispiel der folgende unendliche Baum:

$$(V, E) = (\mathbb{Z}, \{(v, w) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid w = v + 1\})$$

Dieser hat darüber hinaus noch endlichen maximalen Knotengrad.

Möglicherweise ist es nicht ganz offensichtlich, was ein maximaler Teilbaum in einem unendlichen Wald  $W = (V, E)$  darstellt. Seine Knotenmenge ist einfach eine *Zusammenhangskomponente*  $N_\infty(v)$  für ein  $v \in V$  (außer im Fall des leeren Graphen). Wie wird dies definiert? Zunächst rekursiv für  $i \in \mathbb{N}_0$ :

$$\begin{aligned} N_0(v) &:= \{v\} \\ N_{i+1}(v) &:= N_i(v) \cup \{w \in V \mid \exists x \in N_i(v) : (x, w) \in E \vee (w, x) \in E\} \\ N_\infty(v) &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} N_i(v) \end{aligned}$$

Die Zusammenhangskomponente  $N_\infty(v)$  besteht also einfach aus den Knoten, die über einen Pfad von  $v$  aus erreichbar sind. Der maximale Teilbaum, der  $v$  enthält, ist also der durch die Knotenmenge  $N_\infty(v)$  induzierte Teilgraph von  $W$ . Die gleiche Definition hätten wir schon im Fall endlicher Graphen treffen können.

## 11.2 Ein verallgemeinerter Spielbegriff

Die Spiele der Arten **(UKnot)**, **(GKnot)**, **(UKant)** und **(GKant)**, sowie der „neuen“ Arten **(NeuUKnot)**, **(NeuGKnot)**, **(NeuUKant)** und **(NeuGKant)** können auf einfache Weise zu Spielen auf unendlichen Graphen gemacht werden:

Sei  $G = (V, E)$  ein unendlicher Graph und  $F$  eine endliche Farbmenge. Alice und Bob spielen wie bisher, nur dass wegen der Unendlichkeit des Graphen das Spiel eventuell niemals aufhört. Daher müssen wir uns überlegen, wann welcher Spieler gewinnen soll.

Bei den ungerichteten Knotenfärbungsspielen gewinnt Bob nun, sobald ein Spielstand erreicht ist, in dem ein ungefärbter Knoten Nachbarn hat, die in  $\#F$  verschiedenen Farben gefärbt sind. Alice gewinnt, wenn das Spiel immer weiter gespielt wird, ohne dass solch ein Spielstand jemals eintritt.<sup>14</sup>

Entsprechend gewinnt Bob bei den gerichteten Knotenfärbungsspielen, sobald ein Spielstand erreicht ist, in dem ein ungefärbter Knoten  $v$  Nachbarn  $w_1, w_2, \dots, w_{\#F}$  hat, die in  $\#F$  verschiedenen Farben gefärbt sind und so dass

---

<sup>14</sup>Alice gewinnt ebenfalls, wenn alle Knoten gefärbt sind.



für jedes  $i \in \{1, 2, \dots, \#F\}$  die Kante  $(w_i, v)$  existiert (d.h. die Kanten sind auf  $v$  gerichtet). Alice gewinnt, wenn das Spiel immer weiter gespielt wird, ohne dass solch ein Spielstand jemals eintritt.<sup>15</sup>

Bei den ungerichteten Kantenfärbungsspielen gewinnt Bob nun, sobald ein Spielstand erreicht ist, in dem zu einer ungefärbten Kante adjazente Kanten existieren, die in  $\#F$  verschiedenen Farben gefärbt sind. Alice gewinnt, wenn das Spiel immer weiter gespielt wird, ohne dass solch ein Spielstand jemals eintritt.<sup>16</sup>

Entsprechend gewinnt Bob bei den gerichteten Kantenfärbungsspielen, sobald ein Spielstand erreicht ist, in dem in eine ungefärbte Kante eingehende Kanten existieren, die in  $\#F$  verschiedenen Farben gefärbt sind. Alice gewinnt, wenn das Spiel immer weiter gespielt wird, ohne dass solch ein Spielstand jemals eintritt.<sup>17</sup>

Damit diese Spielarten wohldefiniert sind, sollte die Anzahl der Züge höchstens abzählbar sein. (Wie wollte man sonst einen Spielzwischenstand erklären???) Einen Spielendstand nach abzählbar unendlich vielen Zügen kann (mit etwas Mühe) noch wie folgt definiert werden: Sei  $M_i(f)$  die Menge der mit Farbe  $f$  gefärbten Objekte nach dem  $i$ -ten Zug. Dann ist  $M(f) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i(f)$  die Menge der mit Farbe  $f$  gefärbten Objekte beim Spielendstand.

Die Anzahl der Züge hat nichts mit der Größe des Graphen zu tun. Dieser kann durchaus überabzählbar viele Knoten und Kanten enthalten. Im Spiel werden dann aber nur höchstens abzählbar viele davon gefärbt.

Der geneigte Leser mag einwenden: „Was habe ich denn von einem Spiel, das ich, wenn nicht Bob irgendwann zuvor gewinnt, unendlich lange spielen lassen müsste, um sicher zu sein, ob Alice tatsächlich gewonnen hat?“ Nun, man könnte sich vorstellen, dass der  $i$ -te Zug des Spiels  $2^{-i}$  Zeiteinheiten benötigt. Dann ist das Spiel spätestens nach einer Zeiteinheit vorbei. Außerdem wollen wir diese Arten von Spielen ja nicht wirklich durchspielen, sondern mathematische Sätze (Existenz von Gewinnstrategien) darüber beweisen.

Wenn wir Spiele dieser Arten auf einem endlichen Graphen spielen, so gewinnt Bob offenbar genau dann gemäß der neuen Definition wenn er nach der alten Definition gewinnt, nur dass im alten Spiel, nachdem das Spiel eigentlich schon entschieden ist, noch Züge gemacht werden, bis kein Zug mehr möglich ist. Somit handelt es sich bei den neu definierten Spielarten um echte Verallgemeinerungen der anfangs aufgeführten Spielarten, was rechtfertigt, ihnen die gleichen Namen zu geben.

---

<sup>15</sup>Alice gewinnt ebenfalls, wenn alle Knoten gefärbt sind.

<sup>16</sup>Alice gewinnt ebenfalls, wenn alle Kanten gefärbt sind.

<sup>17</sup>Alice gewinnt ebenfalls, wenn alle Kanten gefärbt sind.

### 11.3 Unendliche Spielbäume und Gewinnstrategien

Die Frage, die man sich nun stellt, lautet: „Gibt es für die in 11.2 definierten Spiele auf einem beliebigen unendlichen Graphen immer eine Gewinnstrategie für einen der Spieler?“

Die Antwort ist „ja“.

Um dies einzusehen betrachtet man den *Spielbaum*  $T = (V_T, E_T)$ , der zu solch einem Spiel  $S$ , gespielt auf einem unendlichen Graphen  $G$  mit Farbmengen  $F$ , gehört. Dieser wird rekursiv wie folgt definiert:

- (a) Seine *Wurzel*  $w_0 \in V_T$  ist ein Knoten, der dem Spieler *gehört*, der den ersten Zug hat. Die Wurzel bildet die *0-te Ebene* des Spielbaumes. Sie repräsentiert den Spielstand zu Beginn.
- (b) Zu jedem Knoten  $v$  der  $i$ -ten Ebene und jedem möglichen Spielstand  $\gamma$ , der durch einen Zug des Spielers, dem  $v$  gehört, auf dem Spielstand, der durch  $v$  repräsentiert wird, erzeugt wird, gibt es einen Knoten  $w \in T$ , der den neuen Spielstand  $\gamma$  repräsentiert, sowie eine Kante  $(v, w) \in E_T$ .  $w$  gehört dem anderen Spieler. Alle solchen  $w$  bilden zusammen die  $(i + 1)$ -ste Ebene.

Der Spielbaum  $T$  ist somit ein unendlicher gerichteter Baum, was seinen Namen rechtfertigt. Einen Knoten  $v \in V_T$  mit  $\delta_T^-(v) = 0$  bezeichnen wir als *Blattknoten*. Die Blattknoten entsprechen bijektiv den möglichen Spielendständen, die nach endlich vielen Zügen erreicht werden.

Wenn das Spiel immer nach endlich vielen Schritten endet, so kann an dem (dann endlichen) Spielbaum nach dem Minimax-Prinzip der Spieler, der eine Gewinnstrategie hat, abgelesen werden. Dazu wird ein Blattknoten  $v$  mit  $m(v) := 1$  markiert, wenn Alice in dem entsprechenden Spielendstand gewonnen hat, und mit  $m(v) := 0$ , wenn Bob in dem entsprechenden Spielendstand gewonnen hat. Dann definiert man für alle anderen Knoten  $v \in V_T$  rekursiv, indem man ebenenweise rückwärts bis zur Wurzel vordringt:

$$m(v) := \max\{m(w) \mid (v, w) \in E_T\},$$

falls der Knoten  $v$  Alice gehört, und

$$m(v) := \min\{m(w) \mid (v, w) \in E_T\},$$

falls der Knoten  $v$  Bob gehört. Dann gilt:

$$\begin{aligned} m(w_0) = 1 &\iff \text{Alice hat eine Gewinnstrategie.} \\ m(w_0) = 0 &\iff \text{Bob hat eine Gewinnstrategie.} \end{aligned}$$

Wenn der Spielbaum tatsächlich unendliche Tiefe hat, behelfen wir uns mit einem Trick: Wir betrachten die unendlichen Bäume  $T_n$  für  $n \in \mathbb{N}$ , die aus allen Knoten der 0-ten, 1-sten, 2-ten bis  $n$ -ten Ebene bestehen und den dazugehörigen Kanten (so dass  $T_n$  unendlicher Baum wird). Die Blattknoten  $v$  von  $T$  werden wieder mit  $m_n(v) := 0$  markiert. (Bei Spielen mit unendlich vielen zu färbenden Objekten kann Alice niemals nach endlicher Zeit gewinnen, somit entsprechen die  $v$  den Spielendständen, bei denen Bob gewinnt!) Alle weiteren Knoten  $v$  der  $n$ -ten Ebene werden mit  $m_n(v) := 1$  markiert. Dann berechnet man genau wie oben nach dem Minimax-Prinzip den Wert  $m_n(w_0)$ , der in endlich vielen Schritten gewonnen werden kann (für jede Ebene einen; in einem Schritt werden aber i.a. unendlich viele voneinander unabhängige Maximum- bzw. Minimumbildungen vorgenommen). Offensichtlich gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(w_0) = 1 &\iff \text{Alice hat eine Gewinnstrategie.} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} m_n(w_0) = 0 &\iff \text{Bob hat eine Gewinnstrategie.} \end{aligned}$$

Die Frage, ob eine Gewinnstrategie immer existiert, ist also gleichwertig zur Frage, ob der Grenzwert  $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n(w_0)$  existiert, also zur Frage, ob die Folge  $(m_n(w_0))_{n \in \mathbb{N}}$  schließlich konstant wird. Letzteres trifft aber zu, da, wenn  $m_n(w_0) = 0$  ist, auch  $m_{n+1}(w_0) = 0$  folgt. Denn es gilt  $m_{n+1}(v) \leq m_n(v)$  für alle  $v \in T_n$ . Für Blattknoten ist dies klar, für Knoten der Ebene  $n$ , die in  $T_n$  mit 1 markiert wurden, ebenfalls, induktiv folgt es für alle weiteren Knoten.

Somit hat genau einer der Spieler eine Gewinnstrategie.  $\square$

## 11.4 Spielchromatische Zahlen

Sei  $S$  eines der Spiele  $(K)[X, Y]$ , wobei  $(K)$  eine der acht in 11.2 erwähnten Spielarten sei und  $X \in \{A, B\}$  sowie  $Y \in \{A, -, B\}$ .

Sei  $G$  ein unendlicher gerichteter Graph (der eventuell als ungerichtet aufgefasst werde). Die zu  $S$  gehörige *spielchromatische Zahl*  $Z_S(G)$  von  $G$  ist die kleinste Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$ , so dass Alice eine Gewinnstrategie für das Spiel  $S$ , gespielt auf  $G$  mit Farbmenge  $\{1, 2, \dots, n\}$  besitzt, falls solch ein  $n$  existiert, andernfalls ist  $Z_S(G) := \infty$ .

Sei  $\mathcal{K}$  eine nichtleere Klasse von unendlichen gerichteten Graphen. Dann sei die zu  $S$  gehörige *spielchromatische Zahl*  $Z_S(\mathcal{K})$  von  $\mathcal{K}$  definiert durch:

$$Z_S(\mathcal{K}) := \sup_{G \in \mathcal{K}} Z_S(G)$$

Wir führen die in 3.7 definierten abkürzenden Schreibweisen ebenfalls für die auf unendliche Graphen verallgemeinerten Spiele ein, z.B.  $\chi_{[A,-]}(G) := Z_{(\mathbf{UKnot})[A,-]}((G))$ . Alle weiteren möge man auf Seite 18 nachschlagen.

Für gewisse Klassen unendlicher Graphen, in denen keine endlichen Graphen enthalten sind, lassen sich die spielchromatischen Zahlen zu den „neuen“ Spielarten **(NeuUKnot)**, **(NeuGKnot)**, **(NeuUKant)** bzw. **(NeuGKant)** überraschend einfach bestimmen, wie das folgende Beispiel zeigt:

BEISPIEL: Sei  $G = (V, E)$  ein unendlicher gerichteter Graph, für den es eine unendliche Familie  $\mathcal{V} = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  von Knoten  $v_i \in V$  gibt, so dass für alle  $i \neq j$  gilt:  $N_1(v_i) \cap N_1(v_j) = \emptyset$  (Insbesondere ist  $G$  dann nicht endlich!) Ferner gebe es eine Kante  $e \in E$ . Seien  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Dann ist immer  $\chi_{[X,Y]}^*(G) = 2$ . — *Begründung:* a) Alice hat folgende Gewinnstrategie mit 2 Farben: Sie stellt sicher, dass im Spiel nur eine Farbe benutzt wird. Da es nach Voraussetzung immer ein ungefärbtes  $v_i \in \mathcal{V}$  mit ungefärbten Nachbarn gibt, ist keiner der Spieler dazu gezwungen, die zweite Farbe zu gebrauchen. Somit kann niemals ein ungefärbter Knoten von zwei verschieden gefärbten Knoten umgeben sein. b) Mit nur einer Farbe aber würde Bob gewinnen, sobald einer der beiden Endknoten der Kante  $e$  gefärbt würde. Bob kann letzteres spätestens in seinem ersten Zug erzwingen.

Wenn nun  $G$  ein beliebiger endlicher Graph ist, kann er eine beliebige Zahl  $n \in \mathbb{N}_0$  als neue spielchromatische Zahl haben.<sup>18</sup> Bildet man nun aus  $G$  unter Hinzufügen von unendlich vielen (isolierten) Knoten und einer Kante einen unendlichen Graphen, so hat dieser 2 als neue spielchromatische Zahl. Dies verdeutlicht noch einmal auf drastische Weise, dass die (neuen) spielchromatischen Zahlen von Teilgraphen eines Graphen im allgemeinen nicht kleiner oder gleich der (neuen) spielchromatischen Zahl des Graphen selbst sein müssen.

In **(UKnot)** dagegen ist die Situation komplizierter, die obige Gewinnstrategie mit 2 Farben funktioniert i.a. nicht, da es in diesem Spiel Bob nicht verboten ist, die zweite Farbe zu benutzen, wenn Alice sie noch nicht benutzt hat.

---

<sup>18</sup>Zum Beispiel gilt  $\chi_{[X,Y]}^*(K_n) = n$  für den vollständigen Graph  $K_n$ .

## 11.5 Die wichtigsten Resultate dieser Arbeit

Der größte Teil dieser Arbeit befasste sich mit der Bestimmung von oberen Schranken der zu bestimmten Spielen  $S$  gehörenden spielchromatischen Zahlen von Wäldern mit gewissen Eigenschaften. Dabei wurden durchweg Gewinnstrategien von Alice bezüglich einer jeweils geeigneten Farbmenge angegeben, die die Eigenschaft hatten, dass nach jedem Zug von Alice alle vorkommenden unabhängigen Teilbäume von einigen klar definierten Typen waren.

Vergegenwärtigt man sich die vorkommenden Typen sowie ihre Zerlegung noch einmal, so stellt man fest, dass für jeden Knoten  $v_0$  eines unabhängigen Teilbaums jeder (in Bezug auf Knoten bzw. Kanten) ungefärbte  $v_0$ -Ast in seiner Größe keinerlei Beschränkung unterlag. Was liegt nun näher, als für solche  $v_0$ -Äste auch unendliche Bäume zu erlauben? Dabei ändert sich am Zerlegungsverhalten der einzelnen Typen überhaupt nichts.

Außerdem spielte bei Knotenfärbungsspielen auf Wäldern der Knotengrad (außer in Trivialfällen) keine Rolle. Was hindert uns daran, hierbei auch Graphen mit unendlichen Knotengraden zu erlauben? Das Zerlegungsverhalten der einzelnen Typen ändert sich nicht, außer dass statt endlich vielen Typen bei der Zerlegung eventuell unendlich viele entstehen.

Bei den erlaubten Typen gab es immer endliche Wege zwischen den gefärbten Objekten. Doch färbt man zwei Objekte in einem unendlichen Baum, so gibt es zwischen ihnen ebenfalls einen endlichen Weg, d.h. wir können auch bei Spielen auf unendlichen Wäldern keine unabhängigen Teilbäume (erlaubte oder verbotene) mit anderer innerer Struktur erzeugen als bei Spielen auf endlichen Wäldern.

Insgesamt ist es recht leicht einzusehen, dass sämtliche Resultate dieser Arbeit für bestimmte Teilklassen endlicher Wälder auf in natürlicher Weise entsprechende Teilklassen unendlicher Wälder übertragbar sind. Bei den unteren Schranken ist dies offensichtlich, da die Teilklassen endlicher Wälder in ihren natürlichen Verallgemeinerungen als Teilklassen unendlicher Wälder enthalten sein werden, damit hat man die gleichen Beispiele für untere Schranken. Bei den oberen Schranken beachte man die vorstehenden Überlegungen und mache sich klar, dass das Zerlegungsverhalten der erlaubten Typen auch im Fall eines zu Grunde liegenden unendlichen Waldes das gleiche bleibt.

Im Folgenden werden diese verallgemeinerten Resultate angegeben, zusammen mit den erlaubten Typen unabhängiger Teilbäume, die für den Beweis der oberen Abschätzungen benötigt werden.

## A. Knotenfärbungsspiele

Sei  $\mathcal{W}$  die Klasse aller unendlichen gerichteten Wälder. Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Dann gilt:

$$\chi_{[X,Y]}(\mathcal{W}) = 4$$

erlaubte Typen: alle unabhängigen Teilbäume mit 0, 1 oder 2 gefärbten Knoten

$$\vec{\chi}_{[X,Y]}(\mathcal{W}) = 3$$

erlaubte Typen: alle unabhängigen Teilbäume mit 0 oder 1 gefärbten Knoten

$$\chi_{[X,Y]}^*(\mathcal{W}) = 3$$

$$\vec{\chi}_{[X,Y]}^*(\mathcal{W}) = 3$$

erlaubte Typen: im Vorspiel: alle unabhängigen Teilbäume mit 0, 1 oder 2 gefärbten Knoten, die in Farben  $f \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$  gefärbt sind, sowie alle unabhängigen Teilbäume, in denen sämtliche gefärbten Knoten Nachbarn desselben ungefärbten Knotens und in Farben  $f \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$  gefärbt sind

Die letzten beiden Aussagen stehen nicht im Widerspruch zum letzten Beispiel. Hier sind es manche endliche Wälder, die ja auch unendliche Wälder sind, bei denen eine Gewinnstrategie von Alice mit 2 Farben nicht mehr funktionieren würde.

## B. Kantenfärbungsspiele

Sei  $\Delta \in \mathbb{N}_0$  und  $\mathcal{W}_\Delta$  die Klasse aller unendlichen gerichteten Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ . Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Dann gilt:

$$i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \begin{cases} \Delta & \text{falls } \Delta \in \{0, 1\} \\ \Delta + 1 & \text{falls } \Delta \in \{2, 3, 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 6\} \end{cases}$$

erlaubte Typen ( $\Delta \in \{0, 1, 2\}$ ): alle unabhängigen Teilbäume

erlaubte Typen ( $\Delta = 3$ ): Typen  $T_\gamma^{(1)}, T_\gamma^{(2)}, A, C_\gamma, C, H, G, B, L, I, Z, X, T, D, M, N, P, V_\nu, Y_\nu, O_{\mu\nu}, W_\gamma, E, W, R$  (siehe Abschnitt 9)

erlaubte Typen ( $\Delta = 5$ ): Typen  $S_n$  ( $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ),  $U, Z, W, Y, A, B, C$  (siehe Abschnitt 8)

erlaubte Typen ( $\Delta \geq 6$ ): Typ  $S_n$  ( $n \in \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$ ) (siehe Abschnitt 7)

$$\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_\Delta) = \begin{cases} \Delta & \text{falls } \Delta \in \{0, 1\} \\ \Delta & \text{falls } \Delta = 2 \text{ und } Y = A \\ \Delta + 1 & \text{falls } \Delta = 2 \text{ und } Y \neq A \\ \Delta + 1 & \text{falls } \Delta \in \{3, 5\} \cup \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 6\} \end{cases}$$

erlaubte Typen ( $\Delta \in \{0, 1\}$ ): alle unabhängigen Teilbäume

erlaubte Typen ( $\Delta = 2, Y = A$ ): unabhängige Teilbäume, die an allen gefärbten Kanten keine der in Abschnitt 6.2 definierten Konfigurationen (A) oder (B) besitzen

erlaubte Typen ( $\Delta = 2, Y \neq A$ ): alle unabhängigen Teilbäume

erlaubte Typen ( $\Delta = 3$ ): Typen  $T_\gamma^{(1)}, T_\gamma^{(2)}, A, C_\gamma, C, H, G, B, L, I, Z, X, T, D, M, N, P, V_\nu, Y_\nu, O_{\mu\nu}, W_\gamma, E, W, R, T^g, O_{\mu\nu}^g, B_\gamma^g, W^g, B^g, R^g$  (siehe Abschnitt 9)

erlaubte Typen ( $\Delta = 5$ ): Typen  $S_n$  ( $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ ),  $U, Z, W, Y, A, B, C, V'_1, Y', A', B', C'$  (siehe Abschnitt 8)

erlaubte Typen ( $\Delta \geq 6$ ): Typ  $S_n$  ( $n \in \{0, 1, 2, \dots, \Delta\}$ ) (siehe Abschnitt 7)

## C. Allgemeine Resultate

In dieser Arbeit gab es aber auch noch einige allgemeine Resultate, die ebenfalls bei den verallgemeinerten Spielen auf unendlichen Graphen gelten:

1. Die Spiele der Arten **(NeuUKnot)**, **(NeuGKnot)**, **(NeuUKant)** und **(NeuGKant)** sind schön. (siehe Abschnitt 3.10)
2. Die Spielarten **(UKnot)**, **(GKnot)**, **(UKant)**, **(GKant)**, **(NeuUKnot)**, **(NeuGKnot)**, **(NeuUKant)** und **(NeuGKant)** sind normal. (siehe Abschnitt 3.9)
3. Es gibt zwei gerichtete Graphen  $G_1$  und  $G_2$  mit

$$\vec{\chi}_{[B,-]}(G_1) < \chi_{[B,-]}(G_1) \quad \text{und} \quad \vec{\chi}_{[B,-]}(G_2) > \chi_{[B,-]}(G_2),$$

d.h. anschaulich: die Spiele **(UKnot)** $[B, -]$  und **(GKnot)** $[B, -]$  sind unabhängig voneinander.

Die Ergebnisse über Torusgittergraphen haben keine Entsprechung im Rahmen unendlicher Graphen. Man müsste erst einmal definieren, was ein unendlicher Torusgittergraph ist. Natürlich wäre es, einen solchen entweder als endlichen Torusgittergraphen zu definieren oder als unendliches Gitter. Doch die angegebene Gewinnstrategie von Bob in Satz 19 beruhte ja gerade auf der endlichen Schließungseigenschaft der  $T_{n_1, n_2}$ , würde auf einem unendlichen Gitter so also nicht funktionieren.



## 12 Offene Fragen

### 12.1 Spiele auf Wäldern

Nachdem sich der weitaus umfangreichste Teil dieser Arbeit den Kantenfärbungsspielarten (**UKant**) und (**GKant**) auf Wäldern mit maximalem Knotengrad  $\Delta \neq 4$  gewidmet hat, stellt sich die Frage, ob ähnliche wie die erzielten Resultate auch für  $\Delta = 4$  gelten. Genauer:

Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Sei  $\mathcal{W}_4$  die Klasse aller Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq 4$ .

FRAGE 1: Wie groß ist  $i_{[X,Y]}(\mathcal{W}_4)$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN: 5 oder 6

FRAGE 2: Wie groß ist  $\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{W}_4)$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN: 5 oder 6

Einige Gründe, die zumindest für Frage 1 den Wert 6 vermuten lassen, sind bereits in Abschnitt 10 dargelegt worden.

Aber was ist mit den Spielen (**NeuUKant**) bzw. (**NeuGKant**), die wir in Teil II gar nicht betrachtet haben?

Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Sei  $\Delta \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $\mathcal{W}_\Delta$  die Klasse aller Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ .

FRAGE 3: Wie groß ist  $i_{[X,Y]}^*(\mathcal{W}_\Delta)$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN:  $\Delta$  oder  $\Delta + 1$ , im Fall  $\Delta = 4$  auch  $\Delta + 2$

FRAGE 4: Wie groß ist  $\vec{i}_{[X,Y]}^*(\mathcal{W}_\Delta)$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN:  $\Delta$  oder  $\Delta + 1$ , im Fall  $\Delta = 4$  auch  $\Delta + 2$

Vermutlich sind die Antworten nicht  $\Delta$ , zumindest nicht im Fall  $\Delta = 3$ , da man den Typen  $X$  (siehe Seite 89) wohl kaum vermeiden kann.

Es gibt aber noch weitere Fragen, die im Zusammenhang mit Kantenfärbungsspielen auf Wäldern offen sind. Hierbei geht es um den genauen spielchromatischen Index eines einzelnen Waldes.

Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Sei  $\Delta \in \mathbb{N}_0$ . Sei  $\mathcal{W}_\Delta$  die Klasse aller Wälder  $W$  mit  $\Delta(W) \leq \Delta$ .

FRAGE 5: Kann man die Klasse aller Wälder  $W \in \mathcal{W}_\Delta$  mit  $i_{[X,Y]}(W) = \Delta$  beschreiben?

FRAGE 6: Kann man die Klasse aller Wälder  $W \in \mathcal{W}_\Delta$  mit  $\vec{i}_{[X,Y]}(W) = \Delta$  beschreiben?

FRAGE 7: Kann man die Klasse aller Wälder  $W \in \mathcal{W}_\Delta$  mit  $i_{[X,Y]}^*(W) = \Delta$  beschreiben?

FRAGE 8: Kann man die Klasse aller Wälder  $W \in \mathcal{W}_\Delta$  mit  $\vec{i}_{[X,Y]}^*(W) = \Delta$  beschreiben?

Selbst für Knotenfärbungsspiele auf Wäldern kennt man noch nicht die Unterteilung der Klasse aller Wäldern in diejenigen Teilklassen, für die die spielchromatischen Zahlen einen bestimmten vorgegebenen Wert  $\leq 4$  annehmen. Nur ein Ergebnis in dieser Richtung bezüglich der ungerichteten „neuen“ spielchromatischen Zahl gibt es [5].

## 12.2 Spiele auf komplizierteren Graphen

In der Literatur zu Knotenfärbungsspielen werden neben Wäldern noch viele andere, kompliziertere Graphenklassen behandelt. Auch dort gibt es noch viele offene Fragen, von denen hier nur zwei aufgrund ihrer Bedeutung erwähnt seien.

Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ . Sei  $\mathcal{O}$  die Klasse aller außerplanaren Graphen und  $\mathcal{P}$  die Klasse aller planaren Graphen.

FRAGE 9: Wie groß ist  $\chi_{[X,Y]}(\mathcal{O})$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN: 6 oder 7

FRAGE 10: Wie groß ist  $\chi_{[X,Y]}(\mathcal{P})$ ?

MÖGLICHE ANTWORTEN: 7, 8, ..., 17 oder 18

Die Behandlung von Torusgittergraphen ließ ebenfalls viele Fragen offen.

Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ .

FRAGE 11: Gibt es eine untere Schranke  $c \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n_1 \geq c, n_2 \geq c, \dots, n_k \geq c$  gilt:  $\chi_{[X,Y]}(TG_{n_1, n_2, \dots, n_k}) = 2k + 1$ ?

## 12.3 Grundsätzliche Fragestellungen

Die wichtigste grundsätzliche Fragestellung ist sicherlich die folgende:

Sei  $X \in \{A, B\}$  und  $Y \in \{A, -, B\}$ .

FRAGE 12: Ist das Spiel **(UKnot)** $[X, Y]$  schön?

FRAGE 13: Ist das Spiel **(GKnot)** $[X, Y]$  schön?

FRAGE 14: Ist das Spiel **(UKant)** $[X, Y]$  schön?

FRAGE 15: Ist das Spiel **(GKant)** $[X, Y]$  schön?

Weshalb diese Fragen schwierig zu beantworten sind wurde in 3.10 erläutert.

Im Artikel von Lick und White [16] wird auf einen Zusammenhang zwischen  $k$ -degenerierten Graphen und Graphenfärbungsproblemen eingegangen. Cai und Zhu [4] stellten einen Zusammenhang zwischen der Degeneriertheit eines Graphen und seinem spielchromatischen Index fest. Man könnte allgemeiner fragen:

FRAGE 16: Welche allgemeinen Beziehungen gibt es zwischen chromatischen und spielchromatischen Zahlen und der Degeneriertheit eines Graphen?

Bislang hat man sich immer eine Graphenklasse vorgegeben und auf ihr versucht, die spielchromatischen Zahlen zu bestimmen. Man könnte auch andersherum vorgehen.

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ .

FRAGE 17: Was ist die Klasse aller Graphen mit spielchromatischer Zahl exakt  $= n$ ?

Für ganz kleine  $n$  ist dies einfach zu bestimmen, danach wird dies zu einem Problem, das in seiner Tragweite das Vier-Farben-Problem sowie viele andere Fragestellungen der Färbungstheorie von Graphen übertrifft.



## Literatur

- [1] S.D.Andres: The game chromatic index of forests of maximum degree 5, *Electronic Notes in Discrete Math.* **13** (2003)
- [2] C.Berge: Graphes et hypergraphes, Dunod, Paris 1970
- [3] Bodlaender: On the complexity of some coloring games, *Int. J. Found. Comput. Sci.* **2**, no.2 (1991), 133–147
- [4] L.Cai und X.Zhu: Game chromatic index of  $k$ -degenerate graphs, *J. Graph Theory* **36** (2001), 144–155
- [5] G.Chen, R.H.Schelp und W.E.Shreve: A new game chromatic number, *Europ. J. Combinatorics* **18** (1997), 1–9
- [6] C.-Y.Chou, W.Wang und X.Zhu: Relaxed game chromatic number of graphs, *Discrete Math.* **262**, no 1–3 (2003), 89–98
- [7] T.Dinski und X.Zhu: A bound for the game chromatic number of graphs, *Discrete Math.* **196** (1999), 109–115
- [8] P.Erdős, U.Faigle, H.Hochstättler und W.Kern: Note on the game chromatic index of trees, *Preprint* (2002)
- [9] U.Faigle, W.Kern, H.Kierstead und W.T.Trotter: On the game chromatic number of some classes of graphs, *Ars Combin.* **35** (1993), 143–150
- [10] D.J.Guan und X.Zhu: Game chromatic number of outerplanar graphs, *J. Graph Theory* **30**, no.1 (1999), 67–70
- [11] W.Haken: An attempt to understand the four color problem, *J. Graph Theory* **1**, no.3 (1977), 193–206
- [12] W.He, J.Shao, H.Mi, X.Hou und L.Wang: Game chromatic index of a forest of maximum degree 3, *Manuskript* (1999)
- [13] T.R.Jensen und B.Toft: Graph coloring problems, John Wiley & Sons 1995
- [14] H.A.Kierstead: A simple competitive graph coloring algorithm, *J. Comb. Theory* **78 B** (2000), 57–68
- [15] H.A.Kierstead und W.T.Trotter: Planar graph coloring with an uncooperative partner, *J. Graph Theory* **18**, no.6 (1994), 569–584
- [16] D.R.Lick und A.T.White:  $k$ -degenerate graphs, *Can. J. Math.* **22**, no.5 (1970), 1082–1096

- [17] J.Nešetřil und E.Sopena: On the oriented game chromatic number, *Electronic J. Combinatorics* **8**, no.2 (2001), #R14
- [18] G.Ringel: Map Color Theorem, Springer 1974
- [19] E.R.Swart: The philosophical implications of the four-color problem, *Amer Math Monthly* **87**, no.9 (1980), 697–707
- [20] T.Tymoczko: The four-color problem and its philosophical significance, *J. Philosophy* **76**, no.2 (1979), 57–83
- [21] X.Zhu: The game coloring number of planar graphs, *J. Combin. Theory* **75 B** (1999), 245–258
- [22] X.Zhu: Game coloring number of pseudo partial  $k$ -trees, *Discrete Math.* **215** (2000), 245–262

# Index

- \*-zerlegbar, 56
- , 17
- $\infty$ , 131
- $\Delta^+(G)$ , 3, 131
- $\Delta^-(G)$ , 3, 131
- $\Delta(G)$ , 2, 131
- $\delta_G^+(v)$ , 2, 131
- $\delta_G^-(v)$ , 2, 131
- $\delta_G(v)$ , 2, 131
- $i(G)$ , 7
- $\vec{i}(G)$ , 10
- $i_{[X,Y]}(G)$ , 18
- $i_{[X,Y]}^*(G)$ , 19
- $\vec{i}_{[X,Y]}(G)$ , 18
- $\vec{i}_{[X,Y]}^*(G)$ , 19
- $i_{[X,Y]}(\mathcal{K})$ , 20
- $i_{[X,Y]}^*(\mathcal{K})$ , 20
- $\vec{i}_{[X,Y]}(\mathcal{K})$ , 20
- $\vec{i}_{[X,Y]}^*(\mathcal{K})$ , 20
- $\chi(G)$ , 6
- $\vec{\chi}(G)$ , 9
- $\chi_{[X,Y]}(G)$ , 18
- $\chi_{[X,Y]}^*(G)$ , 18
- $\vec{\chi}_{[X,Y]}(G)$ , 18
- $\vec{\chi}_{[X,Y]}^*(G)$ , 19
- $\chi_{[X,Y]}(\mathcal{K})$ , 20
- $\chi_{[X,Y]}^*(\mathcal{K})$ , 20
- $\vec{\chi}_{[X,Y]}(\mathcal{K})$ , 20
- $\vec{\chi}_{[X,Y]}^*(\mathcal{K})$ , 20
- $A$ , 17
- a**, 61
- adjazent, 1
  - Kanten, 1
  - Knoten, 1
- Alice, 12
- Anfangsknoten, 1
- Anfangspunkt, 1
  - Pfad, 2
- Ast, 58
  - gefärbt, 58
  - ungefärbt, 58
- Aussetzen, 12
- $B$ , 17
- b**, 61
- Baum, 3
- benachbart, 1
- Beweisidee
  - Theorem 25, 55
- Blatt, 4
  - nach außen gerichtet, 4
  - nach innen gerichtet, 4
- Blattanfangspunkt, 31
- Blattknoten, 134
- Bob, 12
- Buchstabe
  - fettgedruckt, 61
  - sonstiger, 61
- c**, 61
- chromatische Zahl, 6
- chromatischer Index, 7
- coloring construction game, 23
- d**, 61
- Dreiertasche, 44
- e**, 61
- Ebene, 134
- echter Zug, 12
- Endknoten, 1
- endlicher Graph, 131
- Endpunkt, 1
  - Pfad, 2
- erlaubter Typ, 55
- f**, 61
- Färbung
  - partiell, 9, 58
- Farbe, 12

Farbfolge, 44  
 Farbmenge, 6, 12  
 game-chromatic number, 23  
 gehören, 134  
 gerichtete chromatische Zahl, 9  
 gerichteter chromatischer Index, 10  
 gerichteter Liniengraph, 11  
 Gewinnstrategie, 13  
     mit  $\#F$  Farben, 14  
     mit Farbmenge  $F$ , 14  
 (GKant), 16, 133  
 (GKnot), 16, 132  
 Graph, 1, 131  
     endlich, 131  
     gerichtet, 1  
     leer, 3  
     planar, 5  
     unendlich, 131  
         gerichtet, 131  
         ungerichtet, 131  
     ungerichtet, 1  
     vollständig bipartit, 22  
 hängen an, 1, 3  
 Index  
     chromatisch, 7  
     gerichtet chromatisch, 10  
     spielchromatisch  
         gerichtet, 18  
         gerichtet „neu“, 19  
         ungerichtet, 18  
         ungerichtet „neu“, 19  
 inzidieren, 1  
 $k$ -(UKnot), 39  
 Kante, 1, 131  
     austretend, 1  
     eingehend, 1  
     innere, 4  
     letzte, 2  
     stark unpassend, 59, 68  
 Kantenfärbung, 7, 10  
 Kantenfärbungsspiel, 13  
     gerichtet, 16, 133  
     gerichtet „neu“, 17, 133  
     ungerichtet, 15, 133  
     ungerichtet „neu“, 17, 133  
 Klammer, 61  
 Knoten, 1, 131  
 Knotenfärbung, 6, 9  
 Knotenfärbungsspiel, 12  
     gerichtet, 16, 132  
     gerichtet „neu“, 17, 132  
     ungerichtet, 15, 132  
     ungerichtet „neu“, 17, 132  
 Knotengrad, 2  
     austretend, 2  
     eingehend, 2  
     maximal, 2  
 Knotenmenge, 2  
 Komplexität, 16  
 Konfiguration  
     verboten, 127  
 Kopfpunkt, 59  
 Kreis  
     schwarz, 61  
     weiß, 61  
 kreisfrei, 2  
 Kurzschreibweisen, 18  
 Länge  
     Pfad, 2  
 Landkartenfärbungsproblem, 5  
 Linie  
     dick, 61  
     dünn, 61  
     gestrichelt, 61  
 Liniengraph, 7, 17  
     gerichtet, 11, 17  
 linker Teilbaum, 101, 105  
 Maker-Breaker-Eigenschaft, 12  
 $M(f)$ , 133  
 $M_i(f)$ , 133  
 $n$ -Stern, 59



- regulär, 59
- $(n + 1)$ -Sternschnuppe, 59
  - regulär, 59
- Nachbarknoten, 1
- (NeuGKant), 17, 133
- (NeuGKnot), 17, 132
- (NeuUKant), 17, 133
- (NeuUKnot), 17, 132
- $N_i(v)$ , 132
- normal, 20
- $\mathcal{NP}$ , 16
- $N_\infty(v)$ , 132
- obere spielchromatische Zahl, 14
- Objekt, 12
- Objektmenge, 12
- partielle Färbung, 9, 58
- Pfad, 2
  - tragend, 58
  - von Kante zu Kante, 3
  - von Kante zu Knoten, 3
  - von Knoten zu Knoten, 2
- Pfeil
  - dünn, 61
- $\mathcal{PSPACE}$ , 16
- Rechenaufwand, 16
- rechter Teilbaum, 101, 105
- regulär, 59
- schön, 14
- Schwanzpunkt, 59
- Spiel, 12, 17, 132
  - explizit, 17
  - $k$ -relaxiert, 39
  - schön, 14
- Spielart, 15, 17
  - normal, 20
- Spielbaum, 134
- spielchromatische Zahl, 14, 19, 135
  - gerichtet, 18
  - gerichtet „neu“, 19
  - obere, 14
  - ungerichtet, 18
  - ungerichtet „neu“, 18
- spielchromatischer Index
  - gerichtet, 18
  - gerichtet „neu“, 19
  - ungerichtet, 18
  - ungerichtet „neu“, 19
- $(Sp)[X, Y]$ , 17
- stark unpassende Kante, 59, 68
- Stern, 59
  - regulär, 59
- Sternpunkt, 3, 59
- Sternpunktmenge, 3, 59
- Sternschnuppe, 59
  - regulär, 59
- Strategie, 13
- Teilbaum, 3
  - links, 101, 105
  - rechts, 101, 105
  - unabhängig, 27, 31, 49, 50
- Teilgraph, 2
- Torusgittergraph, 40
- tragender Pfad, 58
- Typ
  - erlaubt, 55
- (UKant), 15, 133
- (UKnot), 15, 132
- unabhängiger Teilbaum, 27, 31, 49, 50
  - erlaubter Typ, 55
- unendlicher Graph, 131
  - gerichtet, 131
  - ungerichtet, 131
- ungefärbt, 12
- $v_0$ -Ast, 58
  - gefärbt, 58
  - ungefärbt, 58
- verboten, 127
- Vier-Farben-Problem, 5
- Wald, 3

Wurzel, 134

Zahl

chromatisch, 6

gerichtet chromatisch, 9

obere spielchromatische, 14

spielchromatisch, 14, 19, 135

gerichtet, 18

gerichtet „neu“, 19

ungerichtet, 18

ungerichtet „neu“, 18

zerlegbar

\*-zerlegbar, 56

Zerlegungsverhalten

bei (UKant) und (GKant), 51

$\mathbb{Z}_n$ , 40

$Z_S(G)$ , 14, 135

$Z_S^{-1}(G)$ , 14

$Z_S(\mathcal{K})$ , 19, 135

Zug, 12

echt, 12

zulässig, 12, 15, 16

Zulässigkeit, 13

Zusammenhangskomponente, 132